Chapitre 5 - Probabilités (rappels)

I. Espace probabilisable - Probabilité

I.1) Espace probabilisable

Définition I.1
Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est l'univers des résultats observables, et $\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements que l'on considère.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A}$ contient Ω et $\emptyset$, et est stable par union et intersection dénombrable.

I.2) Un peu de vocabulaire

I.2.1 Généralités

Définition I.2
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

L'événement Ω est appelé **l'événement certain**.
L'événement $\emptyset$ est appelé **l'événement impossible**.
On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** quand $A \cap B = \emptyset$.

I.2.2 Système complet d'événement

Définition I.3
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soit $(A_k)_{k\in I}$ une famille d'événements.

On dit que la famille $(A_k)_{k\in I}$ forme un **système complet d'événements** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- $\bigcup\limits_{k\in I} A_k = \Omega$ (lorsque l'on effectue l'expérience, l'un au moins de ces événements est réalisé)
- $\forall (k,j) \in I^2$, si $k \neq j$ alors $A_k \cap A_j = \emptyset$ (ces événements sont deux à deux incompatibles)

Exemple

1. Une urne contient 3 boules rouges, 5 boules noires et 2 boules blanches. On tire une boule au hasard.

   Soient R l'événement "on obtient une boule rouge", N l'événement "on obtient une boule noire" et B l'événement "on obtient une boule blanche".
   La famille (R, N, B) est un système complet d'événements, car lors du tirage on obtient une boule rouge, ou bien une boule noire ou bien une boule blanche.

2. On lance une pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile, puis on s'arrête.

   On note A_i l'événement " pile apparaît pour la première fois au lancer numéro i " .

   On note A_0 l'événement " pile n'apparaît jamais ".
   Les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements.
   En effet, on peut obtenir pour la première fois pile lors du premier lancer, ou bien lors du deuxième lancer, ..., ou bien lors du n^{eme} lancer .... ou bien ne jamais l'obtenir.

I.3) Probabilité, espace probabilisé

Définition I.4
On appelle **probabilité sur l'espace probabilisable** $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant les trois propriétés suivantes

- ⋆ pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$,
- ⋆ $P(\Omega) = 1$,
- ⋆ pour toute famille dénombrable $(A_k)_{k\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$ où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i\in I} P(A_i)$ converge et

$$P\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

Pour tout événement A de $\mathcal{A}$, $P(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement** A.
Tout espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une probabilité P définie sur cet espace est appelé **espace probabilisé**, noté alors $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

I.4) Propriétés d'une probabilité

I.4.1 Premières propriétés

Proposition I.1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements.

- $P(\emptyset) = \dots$
- $P(\bar{A}_1) = \dots$
- $P(A_1 \cap \bar{A}_2) = \dots$
- Si $A_1 \subset A_2$ alors ...
- Formule du crible : $P(A_1 \cup A_2) = \dots.$
- Formule du crible : $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \dots.$
- Pour tout I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, si les événements $(A_k)_{k\in I}$ sont des événements deux à deux incompatibles alors
$$P\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \dots$$
- Si les événements $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ forment un système complet d'événements alors $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \dots$
- Si les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements alors la série de terme général

  $P(A_k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \dots$

I.4.2 Un peu de vocabulaire

Définition I.5
On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque :...

On dit qu'un événement A est réalisé **presque sûrement** lorsque :...

I.4.3 *Inégalité de Boole : HP mais preuve à savoir faire*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient$(E_1, E_2, \cdots, E_n)$ des événements.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

I.4.4 Formule des probabilités totales

Théorème I.1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $I \subset \mathbb{N}$.
Pour tout événement B de $\mathcal{A}$,

$$P(B) \quad = \quad \sum_{i\in I} P(B \cap A_i).$$

I.5) Propriété de la limite monotone

I.5.1 *Cas d'une famille monotone d'événements*

Théorème I.2
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements : $\forall k \in \mathbb{N}$, $E_k \in \mathcal{A}$

Si la suite d'événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N},\ E_n \subset E_{n+1}$)
alors,

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(P\left(E_n\right)\right)$$

Si la suite d'événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N},\ E_{n+1} \subset E_n$)
alors,

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n} E_k\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(P\left(E_n\right)\right)$$

I.5.2 Cas général

Théorème I.3
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements : $\forall k \in \mathbb{N},\ E_k \in \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\right)\right)$$
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcap_{k=0}^{n} E_k\right)\right)$$

I.5.3 Un petit exercice très classique

On fait une succession illimitée de lancers avec un dé équilibré.
Montrer que l'on obtient presque sûrement au moins une fois la face 6 au cours de cette série illimitée de lancers.

II. Probabilités conditionnelles

Définition II.1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On note B un événement tel que $P(B) \neq 0$.
Soit A un événement quelconque.

On appelle **"probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé"**
ou **"probabilité de A sachant B"** le nombre noté $P_B(A)$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Proposition II.1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements tels que....

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Définition II.2
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On note B un événement de Ω tel que $P(B) \neq 0$.
On peut donc définir une application notée P_B de $\mathcal{A}$ vers $\mathbb{R}$ de la manière suivante

$$P_B : A \mapsto P_B(A)$$

Théorème II.1
P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 1
Soient b et n deux entiers naturels non nuls.
On dispose de deux urnes notées U_1 et U_2 contenant chacune b boules blanches et n boules noires.
On pioche une boule dans l'urne U_1. On la met dans l'urne U_2. On pioche ensuite une boule dans U_2.

1. Quelle est la probabilité que les deux boules obtenues lors des deux tirages soient blanches ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une noire, puis une blanche lors de ces deux tirages ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche, puis une noire lors de ces deux tirages ?

Comme P_B est une probabilité, on a les propriétés suivantes :
Proposition II.2
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
On note B un événement tel que ....
Soient A_1, et A_2 des événements de cet espace probabilisé.

1. $P_B(\emptyset) = \dots$
2. $P_B(\bar{A}) = \dots$
3. $P_B(A_1 \cup A_2) = \dots$
4. Si $A_1 \subset A_2$ alors ...
5. La formule du crible reste valable pour la probabilité P_B.
6. Si $(A_k)_{k\in[[1,n]]}$ sont des événements deux à deux incompatibles alors $P_B\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \dots$

III. Les deux formules principales

Théorème III.1
Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements vérifiant : $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème III.2
Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Cas 1 : soit $(A_k)_{k\in[[1,n]]}$ un système complet d'événements tel que $\forall k \in [[1,n]],\ P(A_k) \neq 0$. Alors pour tout événement B,

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B) \end{aligned}$$

Cas 2 : soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(A_k) \neq 0$. Alors pour tout événement B,

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) \times P_{A_k}(B) \end{aligned}$$

Exercice 2
Une urne contient une boule blanche et une boule noire.
On fait une série de tirages selon le protocole suivant :
• Si l'on obtient une boule blanche, on remet cette boule dans l'urne.
• Si l'on obtient une boule noire, on remet la boule obtenue dans l'urne et l'on rajoute deux boules blanches.
Soit n un entier naturel non nul.
On note A_n l'événement " Une boule blanche apparaît pour la première fois lors du tirage numéro n ".
Calculer $P(A_1)$, $P(A_2)$ et $P(A_3)$. Montrer ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \dfrac{2n-1}{2^n n!}$.

Exercice 3
Michel est un fumeur.

- Si Michel ne fume pas un jour, la probabilité qu'il ne fume pas le jour suivant vaut $0,9$.
- S'il fume un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain vaut 0,7.

On note F_n l'événement "Michel fume le n ème jour de l'année" et $p_n = P(F_n)$
On suppose que Michel ne fume pas le premier janvier.

1. Etablir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n
2. Calculer p_n en fonction de n .

Exercice 4
On dispose de trois urnes : U_1 , U_2, U_3. L'urne U_1 contient cinq boules blanches et sept boules noires.
L'urne U_2 contient deux boules blanches et dix boules noires. L'urne U_3 contient trois boules blanches et trois boules noires.
On choisit une urne au hasard et on choisit une boule au hasard dans cette urne. Elle est blanche.
Quelle est la probabilité d'avoir fait le tirage dans l'urne U_1 ?

Remarque
Une formule inutile : la formule de Bayes
Soient $(A_k)_{k\in I}$ une famille d'événements finie ou infinie, formant un système complet d'événements. On suppose que pour tout $k \in I$, $P(A_k) \neq 0$ et que B est un événement tel que $P(B) \neq 0$.
La **formule de Bayes** dit que pour tout $j \in I$,

$$\begin{aligned} P_B(A_j) &= \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_j) \times P_{A_j}(B)}{\sum_{k\in I} P(A_k) \times P_{A_k}(B)} \end{aligned}$$

Il est inutile de l'apprendre car on la retrouve vite, mais il vaut mieux connaître son nom au cas où...

IV. Evénements indépendants

IV.1) Introduction

Il est naturel de dire que deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si la donnée de l'information "B est réalisé" n'a aucune incidence sur la probabilité que A se réalise.

Prenons un exemple.

On lance un dé deux fois de suite. On considère les événements suivants :

- A : "La somme des deux chiffres obtenus est supérieure ou égale à 10".
- B : "Le résultat du premier lancer est 3".
- C : "Le résultat du premier lancer est 5".
- D : "Le résultat du deuxième lancer est 6".

1. Les événement B et C sont ils indépendants ?
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Les événements B et D sont-ils indépendants ?

Lorsque deux événements A et B sont indépendants, la formule des probabilités composées devient $P(A \cap B) = \ldots$.

C'est cette définition que l'on prendra pour l'indépendance d'événements.

IV.2) Indépendance de deux événements

Définition IV.1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements. On dit que les événements A et B sont **indépendants** (pour la probabilité P), lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque
La notion d'indépendance de deux événements dépend de la probabilité P choisie. Elle ne dépend pas uniquement des événements A et B.

Remarque
Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$,
A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$

Exercice 5
tirages avec remise dans une urne
Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On effectue deux tirages successifs dans cette urne avec remise de la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir des boules blanches à chacun de ces deux tirages?

Exercice 6
lancers d'une pièce ou d'un dé
On lance deux fois de suite un dé équilibré. Probabilité d'obtenir le chiffre 6, puis le chiffre 5?

ATTENTION : ne pas confondre incompatibilité et indépendance !!!

Exercice 7
On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. Soit F_1 l'événement : "le premier lancer donne Face". Donner un événement A tel que F_1 et A soient incompatibles. Donner un événement B tel que F_1 et B soient indépendants.

Proposition IV.1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements. Si A et B sont deux événements indépendants, alors :

1. les événements A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.
2. les événements $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.
3. les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

IV.3) Indépendance de n événements

Définition IV.2
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.
On dit que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** lorsque :
pour tout ensemble I inclus dans $[[1, n]]$, $P\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I} P(A_k)$

Proposition IV.2
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements. On note $\forall i \in [[1, n]]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$.
Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ le sont aussi

Exercice 8
tirages avec remise dans une urne
Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On effectue 37 tirages successifs dans cette urne avec remise de la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.

Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules blanches lors de ces 37 tirages ?

lancers d'une pièce ou d'un dé
On lance simultanément 56 dés équilibrés. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6?

IV.4) Indépendance d'une famille d'événements

Définition IV.3
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des événements.

On dit que les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants lorsque, pour tout entier naturel n, les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** .

Exercice 9
Obtention du 2ème Pile
On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile vaut $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.
On fait une succession illimitée de lancers avec cette pièce.
Soit k un entier naturel non nul.
On note B_k l'événement " On obtient PILE pour la première fois lors du lancer numéro k. "
On note C_k l'événement " On obtient PILE pour la deuxième fois lors du lancer numéro k. "
On note A l'événement " on n'obtient que FACE lors de cette série infinie de lancers ".

1. Justifier que l'événement A est négligeable.
2. Soit k un entier naturel non nul. Déterminer la probabilité de B_k pour tout entier naturel k non nul.
3. (a) Calculer $P(C_2)$ et $P(C_3)$.
   (b) Soit k un entier supérieur ou égal à 3.
      i. Justifier que $P(C_k) = \sum_{j=1}^{k-1} P(B_j \cap C_k)$.
      ii. En déduire que $P(C_k) = (k-1)q^{k-2}p^2$.
   (c) Vérifier que $\sum_{k=2}^{+\infty} P(C_k) = 1$.
   (d) Comment peut on interpréter ce résultat?

V. Problème de synthèse : lancers de pièces

Deux joueurs A et B effectuent une succession de lancers d'une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir Pile vaut $1/4$. Le joueur A gagne si lors de la succession il arrive un moment où le nombre de Pile est égal au nombre de Face plus deux. Le joueur B gagne si lors de la succession il arrive un moment où le nombre de Face est égal au nombre de Pile plus deux.
Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs a gagné.

Par exemple, s'ils obtiennent les résultats suivants P F F P P F P F F F alors le joueur B sera gagnant (au lancer numéro 10).

Soit $n \in \mathbb{N}*$. On note

- A_n l'événement : "personne n'a gagné au bout de $2n$ lancers."
- G_n l'événement : " Le $(2n)$ème lancer désigne le joueur A vainqueur."
- G l'événement : "le joueur A remporte la partie."
- P_n l'événement : " On obtient Pile lors du lancer numéro n."
- F_n l'événement : " On obtient Face lors du lancer numéro n."

1. Calculer $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(G_1)$ et $P(G_2)$.
2. Justifier que, si l'événement A_n est réalisé, alors on a obtenu autant de Pile que de Face lors des $2n$ premiers lancers.
3. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_{n+1} = (A_n \cap P_{2n+1} \cap F_{2n+2}) \cup (A_n \cap F_{2n+1} \cap P_{2n+2})$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(A_{n+1}) = \dfrac{3}{8}P(A_n)$.
   (c) Calculer $P(A_n)$ en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.
4. On note A l'événement " La série de lancers est illimitée et ne désigne aucun vainqueur "
   (a) Exprimer l'événement A en fonction des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire que l'événement A est négligeable.
5. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(G_{n+1}) = \dfrac{1}{16}P(A_n)$.
   (b) En déduire l'expression de $P(G_n)$ en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.
6. (a) Justifier que si l'événement G est réalisé alors le joueur A est désigné comme vainqueur à l'issue d'un nombre pair de lancers.
   (b) Exprimer l'événement G en fonction des événements $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la probabilité de l'événement G.
7. Quelle est la probabilité que le joueur B soit vainqueur ?