
Exercices - Chapitre - Probabilités et VAR discrètes

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Y est la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue précédemment.

- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y .
- (a) Montrer que $\forall k \in [[1, n]], P(Y > k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}$.
(b) En déduire $P(Y = k)$ pour tout entier k de $[[2, n]]$.
- Donner $P(Y = n+1)$, puis donner la loi de Y .

Exercice 2

Une variable sans espérance

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire dans les conditions suivantes:

- Si l'on obtient une boule noire on s'arrête.
- Si l'on obtient une boule blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la boule noire.

- Déterminer la loi de X , puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
- X admet-elle une espérance?

Exercice 3

Un sauteur en hauteur

Un sauteur en hauteur tente de franchir successivement les hauteurs 1, 2, ..., n , ...

Le sauteur réussit toujours à franchir la hauteur 0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si le sauteur a réussi à franchir les $n-1$ premières hauteurs, sa probabilité de succès à la hauteur n vaut $\frac{1}{n}$.

Le sauteur est éliminé à son premier échec.

On note X la variable aléatoire égale à la hauteur du dernier saut réussi.

- Trouver la loi de X , puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
- Déterminer $E(X+1)$ puis en déduire l'espérance de X . (Réponse $E(X) = e-1$)
- Calculer $E(X^2-1)$ puis en déduire la variance de X . (Réponse $V(X) = e(3-e)$)

Exercice 4

1. Un grand classique à savoir refaire !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[[0, n]]$.

Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^n P([X \geq k])$

- Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n P([X \geq k])$ et $T_n = \sum_{k=1}^n kP([X = k])$.

- Montrer que $T_n = S_n - nP([X \geq n+1])$.
- Montrer que si la série de terme général $P([X \geq n])$ converge alors $T_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$, puis que X admet une espérance.
- On suppose que X admet une espérance.
Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$ converge et que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) \geq nP(X \geq n+1)$.
En déduire que la série de terme général $P([X \geq n])$ converge et que : $\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X \geq k])}$

Exercice 5

Des Tests

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un lot de n pièces, une pièce est défectueuse. Une machine teste ces pièces, une à une. Elle s'arrête dès qu'elle a détecté la pièce défectueuse. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués par la machine. Déterminer la loi de X , l'espérance de X et sa variance.

Exercice 6

Somme de numéros

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [[1, n]]$.

On pioche une poignée de p jetons dans une boîte contenant n jetons numérotés de 1 à n .

Pour tout entier naturel $k \in [[1, n]]$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale à :

$$\begin{cases} X_k = 1 & \text{si le jeton } k \text{ est obtenu} \\ X_k = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Déterminer la loi de X_k pour tout $k \in [[1, n]]$, puis l'espérance et la variance de X_k .
- Que vaut $X_1 + X_2 + \dots + X_n$? Préciser l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
- On note S la somme des numéros obtenus. Déterminer l'espérance de S et interpréter le résultat dans le cas général, puis dans le cas où $n = 10$ et $p = 5$.

Exercice 7

Théorème de transfert:

- Soit X une v.a.r suivant une loi $\mathcal{B}(n; p)$. Déterminer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$. (Réponse $\frac{(1-p^{n+1})}{p(n+1)}$)
- Même question pour une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. (Réponse $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$)

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ de loi de Poisson de paramètre λ strictement positif.

On définit Y de la façon suivante:

- Si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0.
- Si X prend une valeur paire, alors Y prend la valeur $\frac{X}{2}$.

- Déterminer la loi de Y .
- Montrer que Y admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 9

$P(X = Y), P(X < Y), P("X \text{ est paire}") \dots$ (Très Classique!!!)

Paul et Camille passent un concours chaque année jusqu'à ce qu'ils réussissent à intégrer une école. La probabilité de réussite de chacun à ce concours vaut $1/3$.

On note X (resp. Y) le nombre d'années nécessaires à Paul (resp. à Camille) pour intégrer. Ils passent leur premier concours la même année.

On suppose que les résultats d'une année à l'autre sont indépendants et que les résultats de Paul sont indépendants des résultats de Camille.

- Déterminer les lois, les espérances, les variances des variables aléatoires X et Y .
- Quelle est la probabilité que Camille et Paul intègrent une école la même année?
- Quelle est la probabilité que Camille intègre avant Paul ?
- Déterminer la loi de $X+Y$.
- Camille a-t-elle plus de chances d'intégrer au bout d'un nombre pair ou d'un nombre impair d'années?

Exercice 10

Temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ succès : la loi de Pascal

Soit p un réel tel que $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p .

On effectue une succession illimitée de lancers avec cette pièce.

Pour tout entier naturel i non nul, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on obtient PILE au cours des i premiers lancers.

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire égale au numéro du lancer pour lequel on obtient PILE pour la $n^{\text{ème}}$ fois.

On admet que X_i et Y_n sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

1. Pour tout entier naturel i non nul, déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i .
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_1 .
3. Déterminer $Y_n(\Omega)$.

4. Loi de Y_2 :

- (a) Justifier que $\forall (i, k) \in Y_1(\Omega) \times Y_2(\Omega)$ si $i < k$, alors $P([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k]) = p^2(1-p)^{k-2}$.
Que vaut cette probabilité lorsque $i \geq k$?
- (b) Justifier que $\forall k \in Y_2(\Omega)$ $P([Y_2 = k]) = \sum_{i=1}^{k-1} P([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k])$.
- (c) En déduire que : $\forall k \in Y_2(\Omega)$ $P([Y_2 = k]) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.
- (d) Vérifier que $\sum_{k \in Y_2(\Omega)} P(Y_2 = k) = 1$
- (e) Calculer combien de lancers il faut effectuer en moyenne pour obtenir pile pour la deuxième fois.

5. Loi de Y_n :

On suppose ici que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- (a) Justifier que : $\forall k \in Y_n(\Omega)$ $P(Y_n = k) = pP(X_{k-1} = n-1)$
- (b) En déduire la loi de Y_n .
- (c) Vérifier que l'on obtient le même résultat qu'en 4c pour la loi de Y_2 .

6. Ecrire un script en scilab qui simule l'expérience précédente et qui affiche le rang d'apparition de pile pour la $n^{\text{ème}}$ fois lors d'une succession illimitée de lancers avec une pièce dont la probabilité d'obtenir pile vaut p .

Exercice 11

Un produit de convolution discret (un classique tombé à l'Edhec)

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que les variables X, Y et Z suivent toutes une loi uniforme sur $[1, n]$.

1. (a) Montrer que : $\forall k \in [[2, n+1]]$, $P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}$.
(b) Montrer que : $\forall k \in [[n+2, 2n]]$, $P(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$.
2. En déduire, grâce à la première question que : $P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 12

Loi de $Max(X, Y)$, loi de $Min(X, Y)$, loi de $X+Y$:

On effectue une succession d'expériences aléatoires, consistant à lancer simultanément deux pièces de monnaie A et B . On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque lancer, les résultats des deux pièces sont indépendants.

La probabilité d'obtenir pile avec A vaut $a \in]0, 1[$ et la probabilité d'obtenir pile avec B vaut $\frac{1}{2}$.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre d'expériences qu'il faut réaliser pour que la pièce A (resp. B) donne face pour la première fois.

1. Déterminer les lois de X et Y , et préciser leur espérance et leur variance.
2. Pour tout entier naturel k non nul, déterminer $P(X \geq k)$ en fonction de k .

Dans toute la suite de l'exercice, on prendra $a = \frac{1}{3}$.

On note Z le nombre d'expériences aléatoires qu'il faut faire pour qu'au moins l'une des deux pièces donne face.

3. (a) Exprimer Z en fonction de X et Y .
(b) Pour tout entier naturel k non nul, déterminer $P(Z \geq k)$
(c) En déduire que Z suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

On note T le nombre d'expériences qu'il faut effectuer pour que l'on ait eu au moins une fois face avec chaque pièce.

4. (a) Exprimer T en fonction de X et Y .
(b) Pour tout entier naturel k non nul, déterminer $P(T < k)$
(c) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(T = k) = -5 \left(\frac{1}{6}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
5. (a) Quelle est la probabilité que les pièces A et B donnent "face" pour la première fois lors de la même épreuve ?
(b) Quelle est la probabilité que la pièce A donne " face " pour la première fois avant la pièce B ?
(c) En déduire la probabilité que la pièce B donne " face " pour la première fois avant la pièce A .
6. Déterminer la loi de $X+Y$.

AUTOUR DE LA FORMULE DE L'ESPERANCE TOTALE

Exercice 13

On effectue des lancers indépendants d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir le premier PILE.

On note X le numéro du lancer pour lequel le Pile apparaît pour la première fois. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le premier PILE est apparu au $n^{\text{ème}}$ lancer, on effectue n lancers indépendants d'un dé équilibré et on note Y le nombre de 6 obtenus.

1. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y conditionnelle à l'événement $(X = n)$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance conditionnelle $E(Y|(X = n))$
(c) Calculer l'espérance de Y si elle existe.
3. Simuler Y à l'aide de Python.

Exercice 14

On considère une urne que l'on remplit de la façon suivante : on met une boule blanche, une boule noire puis on lance n fois une pièce équilibrée et on ajoute à l'urne autant de boules blanches que de Pile et autant de noires que de Face. Il y a donc $n + 2$ boules dans l'urne.

On effectue après ce remplissage, des tirages, avec remise, d'une boule dans cette urne.

On note F la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus dans les n lancers et X le numéro du tirage auquel on obtient, pour la première fois, une boule noire.

1. Déterminer la loi et l'espérance de F .
2. Soit $k \in [[0, n]]$
 - (a) Quelle est la loi de X conditionnelle à $(F = k)$?
 - (b) Déterminer $E(X/(F = k))$.
 - (c) Montrer que $\forall k \in [[0, n]], \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$
 - (d) Montrer que X a une espérance et calculer $E(X)$.
3. (a) Préciser $X(\Omega)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = i)$ à l'aide d'une somme.
 (b) Ecrire en Python un script simulant la variable aléatoire X .

Exercice 15

Un sac contient n billes numérotées de 1 à n . On tire une bille au hasard, on note son numéro et on la remet dans le sac. On appelle X la v.a. qui prend pour valeur ce numéro. Si ce numéro est k , on tire alors sans remise k billes que l'on distribue une à une au hasard dans p boîtes $B_1, \dots, B_p$. On note Y_i la v.a. égale au nombre de billes reçues dans la boîte B_i ($i \in [[1, p]]$).

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$, $V(X)$.
2. Pour tout $(k, l) \in [[1, n]]^2$, calculer $P([X = k] \cap [Y_i = l])$.
3. Donner alors la loi de Y_i sous la forme d'une somme.
4. En utilisant la formule de l'espérance totale, calculer $E(Y_i)$.
5. Ecrire un programme en langage Python qui demande n à l'utilisateur puis qui simule X et Y_1 .
6. Calculer l'espérance de $\frac{Y_i}{X}$.