

Exercices - Intégrales impropres - Corrigés des exercices 7-8-10

Exercice 7 :

On définit pour $x > 0$, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

Tout le début de l'exercice est hyper-classique. La dernière question est difficile et l'énoncé non détaillé.

- Soit $x \in]0; +\infty[$. La fonction $g_x : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est impropre en $+\infty$ uniquement. De plus, pour tout $t \geq 1$, $-xt \leq 0$ donc $e^{-xt} \leq 1$, et ainsi $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère de majoration (fonctions positives), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

Bilan : f est bien définie sur $]0; +\infty[$

- Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ avec $x \leq y$. Alors pour tout $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} -xt \geq -yt &\Rightarrow e^{-xt} \geq e^{-yt} \\ &\Rightarrow \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq \frac{e^{-yt}}{1+t^2} \end{aligned}$$

D'où en intégrant, les bornes étant dans le bon sens et les intégrales convergentes, $f(x) \geq f(y)$.

Bilan : f est décroissante sur $]0; +\infty[$

- D'une part, pour tout $x > 0$, pour tout $t \geq 1$, on a $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ d'où en intégrant (bornes bon sens), $f(x) \geq 0$.
D'autre part, pour tout $x > 0$, pour tout $t \geq 1$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$ d'où en intégrant

$$f(x) \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dx = \frac{1}{x}$$

Ainsi, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Bilan : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

- Soit $(x, x_0) \in]0; +\infty[^2$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-x_0 t}}{1+t^2} dt \right| \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{|e^{-xt} - e^{-x_0 t}|}{1+t^2} dt \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_1^{+\infty} |e^{-xt} - e^{-x_0 t}| dt \end{aligned}$$

Supposons $x \leq x_0$. Alors pour tout $t \geq 1$, $e^{-xt} \geq e^{-x_0 t}$, donc $e^{-xt} - e^{-x_0 t} \geq 0$. De plus, si $A > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^A e^{-xt} - e^{-x_0 t} dt &= \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} + \frac{1}{x_0} e^{-x_0 t} \right]_1^A \\ &= \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x_0} e^{-x_0} - \frac{1}{x} e^{-Ax} + \frac{1}{x_0} e^{-Ax_0} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x_0} e^{-x_0} \end{aligned}$$

Donc dans ce cas $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x_0} e^{-x_0}$. De même si $x_0 \leq x$, on trouve que $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{x_0} e^{-x_0} - \frac{1}{x} e^{-x}$.
On trouve dans tous les cas que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \left| \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x_0} e^{-x_0} \right|$$

Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x_0} e^{-x_0} \right| = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$: f est continue en x_0 .

Bilan : f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 8 :

Une série et une suite

- La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, 1]$, l'intégrale I est donc impropre en 0. De plus,

$$\frac{\frac{\ln^2(t)}{1+t^2}}{1/\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} \cdot \ln^2(t)}{1+t^2} \sim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \cdot \ln^2(t) \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0 \text{ par CC}$$

Donc $g(t) = o_{t \rightarrow 0}(\frac{1}{\sqrt{t}})$. Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente (Riemann en 0, $\alpha = 1/2 < 1$), par critère de négligeabilité (fonctions positives), l'intégrale I est convergente.

- On considère, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 t^{2n} \ln^2(t) dt$. Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et $u_n^\epsilon = \int_\epsilon^1 t^{2n} \ln^2(t) dt$ Posons

$$\begin{cases} u(t) = \ln^2(t) \\ v'(t) = t^{2n} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = 2 \cdot \ln(t) \cdot \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$. Par IPP,

$$\begin{aligned} u_n^\epsilon &= [\ln^2(t) \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1}]_\epsilon^1 - \frac{2}{2n+1} \cdot \int_\epsilon^1 \ln(t) \cdot t^{2n} dt \\ &= -\ln^2(\epsilon) \cdot \frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} \cdot v_n^\epsilon \end{aligned}$$

où $v_n^\epsilon = \int_\epsilon^1 \ln(t) \cdot t^{2n} dt$. Posons

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t^{2n} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$. Par IPP,

$$\begin{aligned} v_n^\epsilon &= [\ln(t) \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1}]_\epsilon^1 - \frac{1}{2n+1} \cdot \int_\epsilon^1 t^{2n} dt \\ &= -\ln(\epsilon) \cdot \frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$u_n^\epsilon = -\ln^2(\epsilon) \cdot \frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1} - 2\ln(\epsilon) \cdot \frac{\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \frac{2}{(2n+1)^3} - 2 \cdot \frac{\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

et donc enfin, en faisant tendre ϵ vers 0 et par CC : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_n^\epsilon = \frac{2}{(2n+1)^3}$, ce qui montre que l'intégrale définissant u_n est convergente et que $u_n = \frac{2}{(2n+1)^3}$.

Bilan : $u_n = \frac{2}{(2n+1)^3}$

- Pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} &= \sum_{k=0}^n (-t^2)^k \\ &= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - t^2} \end{aligned}$$

et on en déduit aisément que

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

4. On multiplie par $\ln^2(t)$ la relation précédente :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \ln^2(t) \cdot t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2} \cdot \ln^2(t)}{1+t^2}$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient alors que

$$I = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot u_k + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \cdot \ln^2(t)}{1+t^2} dt$$

Notons que cette dernière intégrale est faussement impropre en 0 donc convergente. De plus,

$$\begin{aligned} |(-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \cdot \ln^2(t)}{1+t^2} dt| &= \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \cdot \ln^2(t)}{1+t^2} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{2n+2} \cdot \ln^2(t) dt \\ &\leq u_{n+1} = \frac{2}{(2n+3)^3} \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{t^{2n+2} \cdot \ln^2(t)}{1+t^2} dt = 0$ par encadrement.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot u_k = I$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{2}{(2k+1)^3} = I$

Bilan : $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{I}{2}}$

Exercice 10 :

Une suite d'intégrales impropres

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$

1. La fonction f_n étant continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale I_n est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. De plus, comme f_n est une fonction paire, l'intégrale I_n converge ssi l'intégrale $I'_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente.

$\frac{1}{(1+x^2)^n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2n}}$. Comme $n \geq 1$, $2n > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente. Par critère d'équivalence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ est convergente. Comme $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ est bien définie, l'intégrale I' converge donc I_n aussi.

Soit $A > 0$.

$$I'_{1,A} = \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}(A) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(A) \rightarrow_{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

d'où $I_1 = 2I'_1 = \pi$ (par parité de f_1).

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'intégrale } I_n \text{ est convergente et } I_1 = \pi}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{(1+x^2)} \in [0, 1]$, donc $\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$. D'où en intégrant, les bornes étant dans le bon sens et les intégrales convergentes, $I_{n+1} \leq I_n$. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1+x^2)^n} \geq 0$ d'où par positivité de l'intégrale (bornes bon sens), $I_n \geq 0$. Etant décroissante et minorée par 0, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $A > 0$ et $I'_{n,A} = \int_0^A \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Posons

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} = (1+x^2)^{-n} \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = -2nx \cdot (1+x^2)^{-n-1} = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. Par IPP,

$$\begin{aligned} I'_{n,A} &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^A + 2n \cdot \int_0^A \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \cdot \int_0^A \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \cdot \int_0^A \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} \text{ encore et toujours !!} \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \cdot I'_{n,A} - 2n \cdot I'_{n+1,A} \end{aligned}$$

En passant à la limite quand A tend vers $+\infty$,

$$I'_n = 2n \cdot I'_n - 2n \cdot I'_{n+1} \Leftrightarrow I'_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I'_n$$

D'où en multipliant par 2 les deux membres, par parité : $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n$.

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n}$

4. On a donc $I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}$, puis

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot I_{n-2} \\ I_n &= \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_1 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} &= \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5) \dots 1}{(2n-2)^2 \cdot (2n-4)^2 \dots 2^2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{4 \cdot (n-1)^2 \cdot 4 \cdot (n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 1^2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{4^{n-1} \cdot ((n-1)!)^2} \end{aligned}$$

D'où enfin

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1} \cdot ((n-1)!)^2} \cdot \pi}$