

Corrigé du Sujet Ecricome 2025

Exercice 1

1. (a) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, elle est donc convergente.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\frac{(-1)^n}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$. D'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, elle est donc convergente.
- (c)

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par critère d'équivalence **pour les séries à termes positifs**, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

2. Les séries étant toutes convergentes,

$$\begin{aligned} A - B &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= 2C \end{aligned}$$

D'autre part, en reprenant le début du calcul,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}A + C \end{aligned}$$

3. (a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Par les formules de trigonométrie classiques,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

En sommant ces deux relations, on obtient donc bien

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

- (b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \forall t \in [0, \pi[,$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})}$$

- **Initialisation** : si $n = 1$, pour tout $t \in [0, \pi[,$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} - \frac{\cos(\frac{3}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})} \text{ possible car } \cos(\frac{t}{2}) \neq 0 \\ &= -\frac{\cos(\frac{t}{2}) + \cos(\frac{3}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})} \\ &= -\frac{\cos(t - \frac{t}{2}) + \cos(t + \frac{t}{2})}{2 \cos(\frac{t}{2})} \\ &= -\frac{2 \cos(t) \cos(\frac{t}{2})}{2 \cos(\frac{t}{2})} \\ &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé tel que la propriété est vraie au rang n . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cdot \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \cos(kt) + (-1)^{n+1} \cdot \cos((n+1)t) \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})} + (-1)^{n+1} \cdot \cos((n+1)t) \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2 \cos((n+1)t) \cos(\frac{t}{2}) - \cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})} \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\cos(\frac{2(n+1)+1}{2}t) + \cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})} \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{\cos(\frac{2(n+1)+1}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Bilan** : par récurrence, $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. En particulier, f est continue sur ce segment donc bornée d'après le cours : il existe $M' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M$. De plus, f' est continue également sur le segment $[a, b]$: il existe $M'' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq M''$. Enfin, en posant $M = \max(M', M'')$, on a bien : $\forall t \in [a, b], |f(t)| \leq M$ et $|f'(t)| \leq M$
- (b) Soit $\lambda > 0$. Pour tout $t \in [a, b]$,

$$|f'(t) \cdot \sin(\lambda t)| \leq |f'(t)| \leq M$$

D'où en intégrant entre a et b , les fonctions étant continues et les bornes dans le bon sens :

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \cdot M \cdot (b - a)$$

Comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot M \cdot (b - a) = 0$, par encadrement $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$

- (c) Posons :

$$\begin{cases} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \cos(\lambda t) & v(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda t) \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on peut donc procéder à une intégration par parties.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt &= \left[\frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda t) \cdot f(t) \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda b) \cdot f(b) - \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda a) \cdot f(a) - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \end{aligned}$$

D'une part, on a déjà vu que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$. Ensuite,

$$\left| \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot b) \cdot f(b) \right| \leq \frac{1}{\lambda} \cdot |f(b)|$$

et comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot |f(b)| = 0$, par encadrement $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot b) \cdot f(b) = 0$. On montre de même que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot a) \cdot f(a) = 0$.

Bilan : On a bien montré que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda \cdot t) dt = 0$

Remarque : il s'agit bien sûr du fameux lemme de Lebesgue (qui était un peu décortiqué cette fois).

5. (a) Pour tout $t \in]0, \pi]$, $\frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$. La fonction φ est ensuite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec le dénominateur qui ne s'annule pas.
Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\varphi'(t) = \frac{\sin(\frac{t}{2}) - t \cdot \frac{1}{2} \cos(\frac{t}{2})}{(\sin(\frac{t}{2}))^2}$$

- (b) Par équivalence classique, $\sin(\frac{t}{2}) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2}$ donc $\varphi(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 2$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 2$: φ est prolongeable par continuité en 0 et on peut poser $\varphi(0) = 2$.

- (c) On a vu que

$$\varphi'(t) = \frac{\sin(\frac{t}{2}) - t \cdot \frac{1}{2} \cos(\frac{t}{2})}{(\sin(\frac{t}{2}))^2}$$

Par équivalence classique, $(\sin(\frac{t}{2}))^2 \sim_{t \rightarrow 0} (\frac{t}{2})^2 \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{4}$.

D'autre part, les DL en 0 à l'ordre 3 de $\sin(x)$ et à l'ordre 2 de $\cos(x)$ sont :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

D'où

$$\begin{aligned} \sin(\frac{t}{2}) - t \cdot \frac{1}{2} \cos(\frac{t}{2}) &= \frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{16} + o(t^3) \\ &= \frac{t^3}{24} + o(t^3) \end{aligned}$$

donc $\sin(\frac{t}{2}) - t \cdot \frac{1}{2} \cos(\frac{t}{2}) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{24}$.

Par conséquent par quotient d'équivalents,

$$\varphi'(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{6} \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = 0$$

Par théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^1$, la fonction φ est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Remarque : exercice fait dans la fiche de révisions d'Analyse.

- (d) Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 2$, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow \pi} f(t) = 2$ donc on peut prolonger f par continuité en π en posant encore $f(\pi) = \varphi(0) = 2$. Puis comme la fonction $t \mapsto \pi - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $[0, \pi]$ et que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, par composition la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$

- (e) Posons

$$\begin{cases} u(t) = \pi - t & u'(t) = -1 \\ v(t) = \cos(k \cdot t) & v(t) = \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot t) \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Par intégration par parties on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt &= [(\pi - t) \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot t)]_0^\pi + \frac{1}{k} \cdot \int_0^\pi \sin(k \cdot t) dt \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{k} \cdot [-\frac{1}{k} \cdot \cos(k \cdot t)]_0^\pi \\ &= \frac{1}{k^2} \cdot (1 - \cos(k\pi)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

- (f) On en déduit que pour tout entier naturel N non nul :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cdot (\pi - t) \cdot \cos(kt) dt &= \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cdot \int_0^\pi (\pi - t) \cdot \cos(kt) dt \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2}{(2n+1)^2} \text{ d'après le 6.(a)} \\ &= -2 \cdot \sum_{n=0}^N \frac{2}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

- (g) Soit $\epsilon \in]0, \pi[$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi-\epsilon} \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cdot (\pi - t) \cdot \cos(kt) dt \\ &= \int_0^{\pi-\epsilon} (\pi - t) \cdot \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cdot \cos(kt) dt \\ &= \int_0^{\pi-\epsilon} (\pi - t) \cdot (-\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})}) dt \text{ d'après le 3. (b) (autorisé car } t \neq \pi) \\ &= [\frac{(\pi - t)^2}{4}]_0^{\pi-\epsilon} - \int_0^{\pi-\epsilon} (\pi - t) \cdot \frac{\cos(\frac{4N+3}{2}t)}{2 \cos(\frac{t}{2})} dt \\ &= \frac{\epsilon^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi-\epsilon} \cos(\frac{4N+3}{2}t) \cdot f(t) dt \end{aligned}$$

Comme la fonction f est continue sur $[0, \pi]$, on obtient en passant à la limite quand ϵ tend vers 0 :

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cdot (\pi - t) \cdot \cos(kt) dt = -\frac{\pi^2}{4} - \int_0^\pi \cos(\frac{4N+3}{2}t) \cdot f(t) dt$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, d'après le 4.(c), $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \cos(\frac{4N+3}{2}t) f(t) dt = 0$.
D'où en passant à la limite dans la relation du 6.(b) :

$$-2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

et on en déduit bien que $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

- (h) Enfin, $A = \frac{4}{3} \cdot C = \frac{\pi^2}{6}$ (résultat classique) et donc $B = A - 2C = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1

1. (a) La famille $(I_3, M, M^2, M^3, M^4, M^5, M^6, M^7, M^8, M^9)$ est une famille de 10 vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension 9, cette famille est donc nécessairement liée
- (b) Comme la famille est liée, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_9$ des réels non tous nuls tels que

$$\alpha_0.I_3 + \alpha_1.M + \dots + \alpha_9.M^9 = 0$$

Posons $P = \sum_{i=0}^9 \alpha_i.X^i$. Ce polynôme P est non nul puisque ses coefficients ne sont pas tous nuls, et $P(M) = 0$. De plus $\deg(P) \leq 9$.

Bilan : il existe un polynôme annulateur non nul de M de degré inférieur ou égal à 9

Remarque : il s'agit de la preuve de cours sur l'existence d'un polynôme annulateur que l'on nous fait refaire dans le cas particulier de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. On admet que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 - 12x - 28$ est un polynôme annulateur de M .

- (a) Un programme possible est le suivant :

```
1. def PolyAnn(M):
2.     a,b=np.shape(M) #on récupère la taille de la matrice
3.     if np.sum(al.matrix_power(M,3)-4*al.matrix_power(M,2)
               -12*M-28*np.eye(a))==np.zeros([a,a]))==9:
4.         return True
5.     else:
6.         return False
```

A la ligne 6., la commande

`al.matrix_power(M,3)-4*al.matrix_power(M,2)-12*M-28*np.eye(a)==np.zeros([a,a])`

est une matrice remplie de True/False qui teste si chaque case est égale à 0 ou non. Comme True=1 et False=0, la matrice est nulle ssi la somme des True/False vaut 9.

- (b) Bien classique ! Comme φ est un polynôme annulateur de M ,

$$\begin{aligned} M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3 = 0 &\Leftrightarrow M(M^2 - 4M - 12I_3) = 28I_3 \\ &\Leftrightarrow M\left(\frac{1}{28}M^2 - \frac{1}{7}M - \frac{3}{7}I_3\right) = I_3 \end{aligned}$$

Bilan : la matrice M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{28}M^2 - \frac{1}{7}M - \frac{3}{7}I_3$

3. (a) Il s'agit dans cette question de refaire la preuve de cours sur le lien entre polynôme annulateur et spectre.

Soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé : $MX = \lambda.X$ avec $X \neq 0$. On a aussi : $M^2.X = \lambda.MX = \lambda^2.X$ et $M^3.X = \lambda^3.X$.

Comme $\varphi(M) = 0$, on a aussi $\varphi(M).X = 0$ donc :

$$\begin{aligned} M^3.X - 4M^2.X - 12M.X - 28X &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^3.X - 4\lambda^2.X - 12\lambda.X - 28X &= 0 \\ \Leftrightarrow \varphi(\lambda).X &= 0 \\ \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = 0 \text{ car } X \neq 0 \end{aligned}$$

Bilan : si λ est une valeur propre de M , alors $\varphi(\lambda) = 0$

Nous avons redémontré dans un cas particulier le théorème du cours qui dit que

$$Sp(M) \subset \{\text{racines du polynôme annulateur } P\}$$

- (b) La fonction φ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12$$

On a alors

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{2} \quad \text{ou} \quad x = x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{2}$$

D'où le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-	+
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow \varphi(x_1) \searrow$	$\varphi(x_2) \nearrow$	$+\infty$

D'après l'énoncé, $\varphi(x_1) = \varphi\left(\frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right) < 0$. L'équation $\varphi(x) = 0$ n'a donc pas de solution sur l'intervalle $]-\infty, x_2]$. Comme la fonction φ est continue et strictement croissante sur $]x_2; +\infty[$, elle est bijective de cet intervalle sur $] \varphi(x_2), +\infty[$. Comme $0 \in] \varphi(x_2), +\infty[$, la fonction φ s'annule en un unique réel x_0 et $x_0 \in]x_2; \infty[$. De plus,

$$\varphi(4) = 4^3 - 3^3 - 12 \cdot 4 - 28 < 0$$

donc $x_0 > 4$. De plus si λ est une valeur propre de M , alors λ vérifie $\varphi(\lambda) = 0$.

Bilan : M admet au plus une valeur propre réelle λ , qui vérifie $\lambda > 4$.

- (c) Supposons M diagonalisable. Alors $Sp(M) = \{\lambda\}$ (le spectre est non vide et possède au plus un élément) et il existe une matrice inversible P telle que

$$M = P.Diag(\lambda, \lambda, \lambda).P^{-1} = \lambda.P^{-1}.I.P = \lambda.I$$

ce qui est absurde puisque M n'est pas diagonale !

Bilan : M n'est pas diagonalisable

Partie 2

On pose $S = {}^tMM$.

4. ${}^tS = {}^t({}^t(M.M)) = {}^tM.{}^tM = {}^tM.M = S$. Donc la matrice S est bien symétrique.

5. Soit λ une valeur propre de S et X un vecteur propre associé : $SX = \lambda.X$ avec $X \neq 0$. Alors

$${}^tX.SX = \lambda {}^tX.X \Leftrightarrow {}^tMX.MX = \lambda.{}^tX.X \Leftrightarrow \|MX\|^2 = \lambda. \|X\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme canonique sur l'espace $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme $\|X\| > 0$, on a alors

$$\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$$

De plus, on a vu au 3.(b) que $0 \notin Sp(M)$, la matrice M est donc inversible. Par conséquent, $MX \neq 0$ et $\frac{\|MX\|}{\|X\|} > 0$.

Bilan : les valeurs propres de S sont strictement positives

6. La matrice S est symétrique donc orthodiagonalisable : il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $S = PD^tP$.

On admet que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$.

7. (a) Soit Δ une matrice diagonale : $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Alors

$$\begin{aligned}\Delta^2 = D &\Leftrightarrow \delta_1^2 = 1, \delta_2^2 = 16, \delta_3^2 = 49 \\ &\Leftrightarrow \delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 4, \delta_3 = \pm 7 \\ &\Leftrightarrow \Delta = \text{Diag}(\pm 1, \pm 4, \pm 7)\end{aligned}$$

Il existe donc $2^3 = 8$ matrices Δ diagonales telles que $\Delta^2 = D$
On note, dans la suite de l'exercice, Δ une telle matrice diagonale.

- (b) Δ est une matrice diagonale sans 0 sur la diagonale, donc Δ est inversible.

8. Notons $R = P.\Delta.^tP$. Alors

$$^tR = ^t(P.\Delta.^tP) = P.^t\Delta.^tP = P.\Delta.^tP = R$$

$$R^2 = P.\Delta.^tP.P.\Delta.^tP = P.\Delta^2.^tP = P.D.^tP = S$$

donc R est bien une matrice symétrique réelle telle que $R^2 = S$.

9. PAS TRES CLAIR PUISQUE L'ON A CHOISI LA MATRICE $R...$
 R est le produit de trois matrices inversible donc R est inversible et

$$R^{-1} = (P.\Delta.^tP)^{-1} = P.\Delta^{-1}.^tP$$

10.

$$\begin{aligned}^tU.U &= (^tR^{-1}).^tM.M.R^{-1} \\ &= P.^t\Delta^{-1}.^tP.S.P.\Delta^{-1}.^tP \\ &= P.\Delta^{-1}D.\Delta^{-1}.^tP \text{ car } \Delta^{-1} \text{ est diagonale} \\ &= P.\Delta^{-1}\Delta^2.\Delta^{-1}.^tP \\ &= I\end{aligned}$$

Bilan : U est une matrice orthogonale

Partie 3

On admet qu'il existe une matrice Δ diagonale vérifiant $\Delta^2 = D$ et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère désormais cette matrice Δ et les matrices U et R définies dans la partie précédente, associées à cette matrice, c'est-à-dire $R = P\Delta^tP$ où P est définie à la question 6, $R^2 = S$, R est symétrique réelle et inversible, $U = MR^{-1}$ et U est orthogonale.

11. Les matrices R et Δ sont semblables donc ont le même spectre d'après le cours (cela est vrai car ces matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes). Donc $Sp(R) = Sp(\Delta) \subset]0; +\infty[$.

On suppose qu'il existe V une matrice orthogonale et T une matrice symétrique réelle à valeurs propres strictement positives telles que $M = VT$.

On pose $N = ^tPTP$ et C_1, C_2 et C_3 les vecteurs colonnes de P où P est définie à la question 6..

12. $M = VT$ donc $T = V^{-1}.M = ^tV.M$ puisque V est orthogonale. Donc comme T est symétrique et V est orthogonale,

$$T^2 = T.T = ^tT.T = (^t^tV.M).^tV.M = ^tM.V.^tV.M = ^tM.M = S$$

De plus, comme P est orthogonale,

$$N^2 = ^tP.T.P.^tP.T.P = ^tP.T^2.P = ^tP.S.P = D$$

13. Montrons que T et S commutent.

$$ST = T^2.T = T^3 = T.T^2 = T.S$$

Donc S et T commutent.

14. Soit i un entier de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.

- (a) Tout d'abord la matrice PE_i est une matrice colonne. Par définition du produit matriciel, pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,

$$(PE_i)_{j,1} = \sum_{k=1}^3 (P)_{j,k} \cdot (E_i)_{k,1} = P_{j,i} = (C_i)_{j,1}$$

et donc $PE_i = C_i$ où E_i est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i qui vaut 1.

- (b) Par définition de la matrice P , les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de S . On note λ_i la valeur propre associée.

- (c)

$$S.TC_i = T.S.C_i = T.\lambda_i.C_i = \lambda_i.TC_i$$

donc TC_i appartient au sous-espace propre de S associé à λ_i .

- (d) La matrice S appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et possède trois valeurs propres distinctes (à savoir 1, 16, 49). D'après le cours, les sous-espaces propres de S sont tous de dimension 1. Comme $C_i \neq 0$ et $C_i \in \text{Ker}(S - \lambda_i.I)$, on a $\text{Ker}(S - \lambda_i.I) = \text{Vect}(C_i)$. Puisque $TC_i \in \text{Ker}(S - \lambda_i.I)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $TC_i = \alpha.C_i$: les vecteurs TC_i et C_i sont bien colinéaires.

15. Comme $TC_i = \alpha.C_i$: C_i est un vecteur propre de T associé à une certaine valeur propre α . On en déduit que les colonnes de la matrice P forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est formée de vecteurs propres de T . D'après le cours, cette matrice P diagonalise T : la matrice $N = ^tPTP$ est diagonale. De plus les valeurs propres de T sont strictement positives donc les coefficients diagonaux de N sont strictement positifs.

16. N est diagonale et $N^2 = D = \Delta^2$. Comme les deux matrices N et Δ sont diagonales à coefficients strictement positifs, on a nécessairement $N = \Delta$. On a donc ensuite

$$T = P.N.^tP = P.\Delta.^tP = R$$

17. Enfin, comme $M = VT$, et T inversible car $0 \notin Sp(T)$, on a

$$V = M.T^{-1} = M.R^{-1} = U$$

Remarques :

- Vous pouvez reconnaître la méthode "de diagonalisation simultanée" (cf ex. de révision d'algèbre et ex. correspondant dans le chapitre sur la réduction).
- Cf aussi ex.9 du chapitre 9 : dans la partie 2 on écrit la "décomposition polaire" de la matrice M : $M = R.U$ où U est une matrice orthogonale et R est une matrice symétrique.
- Dans la Partie 3, on montre l'unicité de cette décomposition polaire : si $M = R.U$ et $M = V.T$ alors $R = V$ et $U = T$.

Problème

Partie 1

1. Soit x et y deux réels.

- (a) Comme $\lim_{t \rightarrow 0} (1-t)^{y-1} = 1$ (pour tout y), on a

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_{t \rightarrow 0} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

- (b) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est donc impropre en 0 uniquement. Comme $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{1-x}}$ et comme l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}} dx$ est une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si $1-x < 1 \Leftrightarrow x > 0$, par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives,

l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$

- (c) Posons $s = 1 - t$. Il s'agit d'un changement de variables affine non constant donc autorisé.
Comme $ds = -dt$, et au niveau des bornes :

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ s = 0 \end{cases}$$

d'après le cours l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

est de même nature que

$$\int_{\frac{1}{2}}^0 (1-s)^{x-1}.s^{y-1}(-ds) = \int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}.(1-s)^{x-1} ds$$

- (d) En réutilisant le 1.(b), cette dernière intégrale converge ssi $y > 0$.

Finalement, comme $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si les deux intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ convergent, on en déduit le résultat souhaité.

Bilan : $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$

On note désormais, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

2. Posons encore $s = 1 - t$. Il s'agit d'un changement de variable affine non constant donc autorisé. On obtient par ce changement de variable que

$$B(x, y) = \int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}(-ds) = \int_0^1 s^{y-1}.(1-s)^{x-1}ds = B(y, x)$$

3. Soit $x > 0$,

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{1}{x}.t^x\right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

4. (a) $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$,

$$\begin{aligned} B(x+1, y) + B(x, y+1) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}.(t+1-t)dt \\ &= B(x, y) \end{aligned}$$

- (b) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et $B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt$. Cette intégrale est possiblement doublement impropre en 0 et en 1, nous devons fixer des bornes avant d'intégrer par parties. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$.

Posons

$$\begin{cases} u(t) = (1-t)^y \\ v'(t) = t^{x-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = -y.(1-t)^{y-1} \\ v(t) = \frac{1}{x}.t^x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on peut donc intégrer par parties. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{x-1}(1-t)^y dt &= \left[(1-t)^y.\frac{1}{x}.t^x\right]_a^b + \frac{y}{x} \int_a^b t^x.(1-t)^{y-1} dt \\ &= \frac{1}{x}(1-b)^y.b^x - \frac{1}{x}.(1-a)^y.a^x + \frac{y}{x} \int_a^b t^x.(1-t)^{y-1} dt \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow 1$, on trouve que :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{y}{x} \int_0^1 t^x.(1-t)^{y-1} dt$$

Bilan : $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$

- (c) En injectant le résultat du (b) dans celui du (a), on obtient :

$$\begin{aligned} B(x+1, y) + \frac{y}{x}B(x+1, y) &= B(x, y) \\ \Leftrightarrow \frac{x+y}{x}B(x+1, y) &= B(x, y) \\ \Leftrightarrow B(x+1, y) &= \frac{x}{x+y}B(x, y) \end{aligned}$$

5. Puisque l'énoncé nous propose le résultat, on peut travailler par récurrence !
La méthode "de descente" fonctionne aussi. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}(p) : B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

- Initialisation : si $p = 1$, $B(1, q) = B(q, 1) = \frac{1}{q} = \frac{0!. (q-1)!}{q!}$ donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $\mathcal{H}(p)$ est vraie.

$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \frac{p}{p+q}.B(p, q) \\ &= \frac{p}{(p+q)} \cdot \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{p!. (q-1)!}{(p+q)!} \end{aligned}$$

donc le résultat est vrai au rang $p+1$.

- Conclusion : $\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, B(p, q) = \frac{p!. (q-1)!}{(p+q-1)!}$

Partie 2

6. On définit la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall \nu \in]0, +\infty[, \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t} dt$.

On rappelle que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout réel ν strictement positif, $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

- (a) On montre par une récurrence très facile (mais à rédiger !) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Remarque : ce sujet demandait beaucoup de preuve de cours.

- (b) Le calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est classique : cf ex. de cours (à savoir refaire en colle) !!!

On obtient $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, on définit $f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

7. (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)dt$.

La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $]0, +\infty[$, l'intégrale est donc impropre uniquement en 0 et en $+\infty$. Posons le changement de variables $u = bt$ qui est affine non constant donc autorisé. On a

$du = bdt$. D'après le cours, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)dt$ est de même nature que :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{u}{b}\right)^{a-1} e^{-u} \cdot \frac{1}{b} du \\ &= \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \cdot \frac{1}{b^{a-1}} \cdot \int_0^{+\infty} u^{a-1} \cdot e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \Gamma(a) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et l'intégrale définissant la fonction Γ est bien convergente puisque $a > 0$. Par conséquent

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt \text{ converge}}$$

- (b) La fonction $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus nous venons de voir que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = 1$.

Bilan : $\boxed{f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité}}$

8. (a) Si $b = 1$, $f_{a,1}(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot t^{a-1} \cdot e^{-t}$ si $t > 0$ et 0 sinon. Donc $\boxed{X \hookrightarrow \gamma(a)}$.
D'après le cours, $E(X) = a$ et $V(X) = a$.
- (b) Si $a = 1$, $f_{1,b}(t) = b \cdot e^{-bt}$ si $t > 0$ et 0 sinon. Par conséquent $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)}$.
D'après le cours $E(X) = \frac{1}{b}$.
On a aussi $V(X) = \frac{1}{b^2}$.
Remarque : l'énoncé demande de refaire la preuve de cours pour $V(X)$...
9. Soit X une variable aléatoire à densité de densité $f_{a,b}$.

- (a) Tout d'abord, $(bX)(\Omega) =]0; +\infty[$. Donc si $x \leq 0$, $F_{bX}(x) = 0$. Si $x > 0$,

$$F_{bX}(x) = P(bX \leq x) = F_X\left(\frac{x}{b}\right)$$

D'où en dérivant : pour tout $x > 0$,

$$f_{bX}(x) = \frac{1}{b} \cdot f_X\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \cdot e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-x}$$

donc bX suit la loi $\gamma(a)$.

- (b) On a donc $E(bX) = a$ et $V(bX) = a$. Par linéarité de l'espérance, $\boxed{E(X) = \frac{a}{b}}$ et $b^2 \cdot V(X) = a$
donc $\boxed{V(X) = \frac{a}{b^2}}$

10. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité indépendantes de densités respectives $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$, où a_1, a_2 et b sont trois réels strictement positifs.

- (a) Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(x-t) dt$$

D'après le cours, $X_1 + X_2$ est à densité si et seulement si la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sauf en quelques points. Si c'est le cas, h est une densité de $X_1 + X_2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(x-t) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow t > 0 \text{ et } x-t > 0 &\Leftrightarrow t > 0 \text{ et } t < x \end{aligned}$$

Si $x \leq 0$, cela est impossible donc $h(x) = 0$. Supposons maintenant $x > 0$. Alors

$$f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 < t < x$$

donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \cdot t^{a_1-1} \cdot e^{-bt} \cdot \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \cdot (x-t)^{a_2-1} \cdot e^{-b(x-t)} dt \\ &= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2)} \cdot e^{-bx} \cdot \int_0^x t^{a_1-1} \cdot (x-t)^{a_2-1} dt \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $u = \frac{x-t}{x}$ dans cette dernière intégrale. Il s'agit encore une fois d'un changement de variables affine donc autorisé. On a alors (sous réserve de convergence)

:

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{a_1-1} \cdot (x-t)^{a_2-1} dt &= \int_0^1 (xu)^{a_1-1} \cdot (x-xu)^{a_2-1} \cdot x du \\ &= x^{a_1+a_2-1} \cdot \int_0^1 u^{a_1-1} \cdot (1-u)^{a_2-1} du \\ &= x^{a_1+a_2-1} \cdot B(a_1, a_2) \end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale définissant $h(x)$ est bien convergente pour $x > 0$ et que

$$h(x) = \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx}$$

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $X_1 + X_2$ est à densité, de densité h .

Bilan : $X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

- (b) On en déduit, comme $\int_0^{+\infty} f_{X_1+X_2}(x) dx = 1$, que

$$\frac{\Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2)}{B(a_1, a_2)} = b^{a_1+a_2} \cdot \int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} \cdot e^{-bx} dx$$

et en posant (encore !!) $u = bx$, on obtient que

$$\frac{\Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2)}{B(a_1, a_2)} = \Gamma(a_1 + a_2)$$

Bilan : $\boxed{\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}$

- (c) $\boxed{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)} = \pi}$

Partie 3

On suppose dans cette partie et pour les questions d'informatique que les bibliothèques suivantes sont importées ainsi :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

11. Soit (x, y) un couple de réels strictement positifs.

- (a) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. La variable $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ est bornée (elle est à valeur dans $[0, 1]$ donc admet une espérance. D'après le théorème de transfert,

$$E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} \cdot f_U(t) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} dt = B(x, y)$$

On admet que $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une variance.

- (b) **def Simul(x,y) :**
 U=rd.random()
 return U(x-1)*(1-U)**(y-1)**

- (c) Comme les variables (U_k) sont mutuellement indépendantes, par coalition les variables $U_k^{x-1} \cdot (1-U_k)^{y-1}$ sont également indépendantes. Ces variables suivent toutes la même loi, admettent la même espérance et la même variance. D'après la loi faible des grands nombres,

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n U_k^{x-1} \cdot (1-U_k)^{y-1} \xrightarrow{P} E(U^{x-1} \cdot (1-U)^{y-1}) = B(x, y)$$

```
(d) def Rn(x,y,n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+Simul(x,y)
    return (1/n)*S
```

- (e) On voit que pour une grande valeur de n , $R_n \simeq 3,1$. Or nous savons que R_n converge en probabilités vers $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ceci illustre le fait que $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ que nous avons prouvé à la fin de la Partie 2.

12. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 .

- (a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
D'après le théorème de transfert, sous réserve d'existence,

$$E(X^{a-1}) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a)$$

Donc $E(X^{a-1})$ existe et $E(X^{a-1}) = \Gamma(a)$. De même, sous réserve d'existence,

$$E((X^{a-1})^2) = E(X^{2a-2}) = \int_0^{+\infty} t^{2a-2} \cdot e^{-t} dt = \Gamma(2a-1)$$

Donc X^{a-1} admet un moment d'ordre 2 puisque $2a-1 \geq 1 > 0$. On a alors

$$V(X) = E((X^{a-1})^2) - E(X^{a-1})^2 = \Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2$$

- (b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même de loi exponentielle de paramètre 1 . On définit, pour tout entier naturel non nul n , $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{a-1}$.

D'une part, par linéarité de l'espérance,

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n E(X_k^{a-1}) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \Gamma(a) = \Gamma(a)$$

D'autre part, comme les variables $(X_k)^{a-1}$ sont indépendantes (par coalition) de même espérance, variance, d'après la loi faible des grands nombres,

$$M_n \xrightarrow{P} E(X^{a-1}) = \Gamma(a)$$

Bilan : M_n est un estimateur convergent et sans biais de $\Gamma(a)$

- (c) Expliquer ce que renvoie la fonction Myst suivante :

```
def Myst(n):
    U = rd.random(n)
    X = -np.log(1-U)
    return(X)
```

Cette fonction renvoie n simulations de la variable $-\ln(1-U)$ où U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

De façon classique, on montre que cette variable suit la loi exponentielle de paramètre 1 (à faire !).

- (d) En utilisant les questions précédentes , la fonction suivante renvoie une valeur approchée de $\Gamma(a)$:

```
def Approx(n, a):
    X = Myst(n)
    return (1/n)*np.sum(Myst(n)**(a-1))
```