

## MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Mercredi 23 Avril 2025, 4 heures.

---

### Solution.

---

---

*On suppose, pour toutes les questions en langage Python, les bibliothèques usuelles déjà importées sous leur raccourcis habituels.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

---

# Problème 1

## Partie 1 - Une suite d'intégrales

On introduit les deux suites réelles  $(I_n)_{n \geq 0}$  et  $(J_n)_{n \geq 0}$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt, \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt.$$

1. Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les intégrales  $I_n$  et  $J_n$  sont bien définies et exprimer  $J_n$  en fonction de  $I_n$ .

*Solution.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $h_n : t \mapsto (1-t^2)^n$  est continue sur  $[0, 1]$  (et sur  $[-1, 1]$ ) en tant que fonction polynomiale. Les intégrales  $I_n$  et  $J_n$  sont donc bien définies. De plus,  $h_n$  étant aussi clairement paire et l'intervalle  $[-1, 1]$  symétrique, on a immédiatement  $J_n = 2I_n$ .  $\square$

2. Calculer  $I_0$ .

*Solution.* Calcul immédiat :  $I_0 = \int_0^1 dt = 1$ .  $\square$

3. Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

*Solution.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a, par linéarité de l'intégrale,

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt - \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale, car, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $t^2(1-t^2)^n \geq 0$ . Ainsi,  $(I_n)$  est bien décroissante.  $\square$

4. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

*Solution.* Soit  $n \geq 1$ . On commence par écrire que :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1} dt = I_{n-1} - \int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1} dt.$$

On va faire une IPP sur l'intégrale du membre de droite. Soient  $u$  et  $v$  les fonctions polynomiales (donc de classe  $\mathcal{C}^1$ ) définies sur  $[0, 1]$  par

$$\begin{cases} u'(t) = -t(1-t^2)^{n-1} \\ v(t) = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u(t) = \frac{1}{2n}(1-t^2)^n \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

Par IPP (licite au vu de ce qui précède), on a

$$\begin{aligned} - \int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1} dt &= \left[ \frac{t}{2n}(1-t^2)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2n}(1-t^2)^n dt \\ &= \frac{1}{2n} I_n \end{aligned}$$

Au final, on a obtenu  $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n$ . Mais

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n \iff I_n \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) = I_{n-1} \iff I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1},$$

ce qu'on voulait.  $\square$

5. En déduire, par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

puis donner la valeur de  $J_n$ .

*Solution.* Procédons comme demandé par récurrence.

**✕ Initialisation.** Pour  $n = 0$ , on a déjà calculé  $I_0 = 1$ . Or,

$$\frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = \frac{1^2}{1} = 1,$$

et la formule est bien vérifiée.

**✕ Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. On suppose la formule vraie au rang  $n$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ . Par la Question 4., et par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_n = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2(n+1))^2}{(2n+3)(2n+2)} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}. \end{aligned}$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie, par principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = 2 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

□

6. **Informatique.** Compléter alors la fonction Python ci-dessous pour qu'elle calcule et renvoie la valeur de  $I_n$ , où  $n$  est en argument.

```
def I(n) :
    i=1
    for k in ..... :
        i = .....
    return i
```

*Solution.* On utilise la formule de récurrence de la Question 4. pour calculer les termes de la suite par récurrence. Cela donne l'un ou l'autre des programmes suivants, selon la manière d'exprimer la relation de récurrence.

|                                                                                                     |                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>def I(n) :     i=1     for k in range(1, n+1) :         i = (2*k)/(2*k+1)*i     return i</pre> | <pre>def I(n) :     i=1     for k in range(n) :         i = (2*k+2)/(2*k+3)*i     return i</pre> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|

□

7. On admet la formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . Montrer que  $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ .

*Solution.* On utilise la formule de Stirling admise. On remplace chaque factorielle par l'équivalent donné par celle-ci. Pour  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} J_n &= 2 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &\sim \frac{2 \times 4^n \times 2\pi n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} = \frac{2\pi(2n)(2n)^{2n}e}{\sqrt{2\pi(2n+1)}(2n+1)^{2n}(2n+1)} \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{2n}{2n+1} \sim 1, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \sim \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi(2n)}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

et

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \exp\left(-2n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) = \exp\left(-2n \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Au final, on a bien

$$J_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

□

## Partie 2 - Des polynômes orthogonaux

Dans toute cette section, on considère, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[x]$  des polynômes et, pour un entier  $n \geq 2$  fixé, son sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[x]$  formé des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  dont on note  $\mathcal{B}_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  la base canonique.

### 8. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[x]$ .

On notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ce produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

*Solution.* On vérifie les conditions du cours.

**✕ Symétrie.** Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ . Alors, par commutativité du produit de réels,

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^1 Q(t)P(t)dt = (Q, P)$$

et l'application est bien symétrique.

**✕ Bilinéarité.** Soient  $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu R, Q) &= \int_{-1}^1 (\lambda P + \mu R)(t)Q(t)dt = \int_{-1}^1 (\lambda P(t) + \mu R(t))Q(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 \lambda P(t)Q(t)dt + \int_{-1}^1 \mu R(t)Q(t)dt = \lambda \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt + \mu \int_{-1}^1 R(t)Q(t)dt \\ &= \lambda(P, Q) + \mu(R, Q) \end{aligned}$$

Ainsi l'application est linéaire à gauche et comme elle est aussi symétrique, elle est linéaire à droite et donc bilinéaire.

**✕ Positivité.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $P(t)^2 \geq 0$ . Par positivité de l'intégrale,  $(P, P) \geq 0$ .

**✗ Définie-positivité.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . L'application  $t \mapsto P(t)^2$  est continue et positive sur  $[-1, 1]$ . Ainsi,

$$(P, P) = 0 \iff \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0 \iff (\forall t \in [-1, 1], P(t)^2 = 0) \iff (\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0).$$

Or un polynôme avec une infinité de racines (tous les réels entre  $-1$  et  $1$ ) est identiquement nul. On a bien

$$(P, P) = 0 \iff P = 0$$

et l'application est définie-positive. C'est bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ . □

**9.** Les polynômes de  $\mathcal{B}_n$  sont-ils deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire ?

*Solution.* Non ! Si  $k \neq \ell$  et  $k + \ell$  pair, on a

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \int_{-1}^1 t^{k+\ell} dt = 2 \int_0^1 t^{k+\ell} dt = \frac{2}{k+\ell+1} \neq 0,$$

donc  $e_k$  et  $e_\ell$  ne sont pas orthogonaux pour ce produit scalaire dans ce cas. □

On définit ensuite l'application  $u$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par  $u : P \mapsto u(P)$  où  $u(P)$  est la dérivée de la fonction polynomiale  $x \mapsto (1 - x^2)P'(x)$ . Par abus de notation et pour alléger la présentation, on s'autorisera à écrire

$$u(P) : x \mapsto ((1 - x^2)P'(x))'.$$

**10.** Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

*Solution.* Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . L'application  $x \mapsto P'(x)$  est polynomiale, de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . L'application  $x \mapsto 1 - x^2$  est polynomiale de degré 2. Par produit, l'application  $x \mapsto (1 - x^2)P'(x)$  est donc polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n - 1 + 2 = n + 1$ . Par opération de dérivation, l'application  $x \mapsto u(P)(x)$  est bien polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n + 1 - 1 = n$  donc  $u$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrons qu'elle est linéaire. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Par linéarité de l'opération de dérivation, on a (pour tout  $x \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q)(x) &= ((1 - x^2)(\lambda P + \mu Q)'(x))' \\ &= ((1 - x^2)(\lambda P' + \mu Q')(x))' = (1 - x^2)'(\lambda P'(x) + \mu Q'(x)) + (1 - x^2)(\lambda P''(x) + \mu Q''(x)) \\ &= \lambda((1 - x^2)'P'(x) + (1 - x^2)P''(x)) + \mu((1 - x^2)'Q'(x) + (1 - x^2)Q''(x)) \\ &= \lambda((1 - x^2)P'(x))' + \mu((1 - x^2)Q'(x))' = \lambda u(P)(x) + \mu u(Q)(x) \end{aligned}$$

et  $u$  est bien linéaire donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . □

**11. a.** Montrer que  $u(e_0) = 0$  puis que  $u(e_1) = -2e_1$ .

*Solution.* Par définition, comme  $e'_0 = 0$ , on a immédiatement  $u(e_0) = 0$  puis comme  $e'_1 = e_0 : x \mapsto 1$ , on a (pour tout  $x \in \mathbb{R}$ )

$$u(e_1)(x) = (1 - x^2)' = -2x = -2e_1(x)$$

et le résultat attendu. □

**b.** Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Montrer que  $u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$ .

*Solution.* Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Observons que  $e'_k = ke_{k-1}$  et  $e_1e_{k-1} = e_k$ . On a alors (pour tout  $x \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} u(e_k)(x) &= ((1 - x^2)ke_{k-1}(x))' = -2kxe_{k-1}(x) + (1 - x^2)k(k-1)e_{k-2}(x) \\ &= -2ke_k(x) + k(k-1)e_{k-2}(x) - k(k-1)e_k(x) \\ &= -k(k+1)e_k(x) + k(k-1)e_{k-2}(x) \end{aligned}$$

comme attendu. □

**c.** Dédurre des deux questions précédentes le spectre de  $u$  ainsi que la dimension de chaque sous-espace propre.

*Solution.* Les deux questions précédentes permettent d'écrire la matrice de  $u$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_n$  qui est alors triangulaire supérieure ce qui permet de lire ses valeurs propres sur sa diagonale ; en effet, on a

$$M = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & -6 & \dots & \dots & \vdots \\ & & 0 & -k(k+1) & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $\text{Sp}(u) = \{-k(k+1) : k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ . L'application  $x \mapsto -x(x+1)$  étant injective (sur  $\mathbb{R}_+$ ), les valeurs propres sont toutes distinctes : un théorème du cours permet de conclure que  $u$  est diagonalisable et que chaque sous-espace propre est de dimension 1.  $\square$

- 12.** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe une base orthonormale de  $\mathbb{R}_n[x]$  formée de vecteurs propres de  $u$ . En déduire l'existence d'une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[x]$  formée de vecteurs propres de  $u$  pour lesquels le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1. On notera  $\mathcal{L}_n = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  cette base.

*Solution.* On va montrer que  $u$  est symétrique, ce qui permet, par théorème spectral de conclure à la première partie de la question. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ . Notons, pour  $f$  et  $g$  les fonctions polynomiales (donc de classe  $\mathcal{C}^1$ ) définies sur  $[-1, 1]$  par

$$\begin{cases} f'(t) &= ((1-t^2)P'(t))' \\ g(t) &= Q(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} f(t) &= ((1-t^2)P'(t)) \\ g'(t) &= Q'(t) \end{cases}$$

On a, par IPP (licite),

$$\begin{aligned} \langle u(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 u(P)(t)Q(t)dt = \int_{-1}^1 ((1-t^2)P'(t))'Q(t)dt \\ &= [(1-t^2)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t)dt \\ &= - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t)dt. \end{aligned}$$

Cette expression étant symétrique en  $P$  et  $Q$  (c'est à dire qu'on peut échanger les rôles de  $P$  et  $Q$  et garder la même expression), on en déduit que  $\langle u(P), Q \rangle = \langle u(Q), P \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$ .

Ainsi,  $u$  est bien symétrique et diagonalisable dans une base orthonormée constituée de vecteurs propres de  $u$ . En divisant chaque terme de cette base par son coefficient (forcément non nul) de plus haut degré, on a une famille qui reste orthogonale (car chaque vecteur de la nouvelle famille est colinéaire à celui de l'ancienne) et encore constituée de vecteurs propres de  $u$ .  $\square$

*On admet que, quitte à réordonner les termes, la famille de polynômes  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  ainsi construite est telle que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(L_0, L_1, \dots, L_k)$  forme une base orthogonale de  $\mathbb{R}_k[x]$ . On pourra utiliser cette observation dans la suite du problème.*

- 13.** Soit  $m > n$  un entier. Soit  $f \in \mathbb{R}_m[x]$  un polynôme.

- a.** Montrer qu'il existe un unique polynôme  $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$  tel que

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - g\|.$$

Montrer qu'il existe  $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $T_n = \sum_{k=0}^n c_k L_k$ .

On précisera, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , l'expression de  $c_k$  en fonction de  $f$  et de  $L_k$ .

*Solution.* Notons  $p_n$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . D'après le cours, on sait que :

$$T_n = p_n(f) \iff \min_{g \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - g\| = \|f - T_n\|.$$

Il suffit donc de prendre  $T_n = p_n(f)$  et ce choix est unique. On exprime la projection orthogonale à l'aide de la base  $(L_0, \dots, L_n)$  (la base  $\left(\frac{L_k}{\|L_k\|}\right)_{0 \leq k \leq n}$  étant une b.o.n de  $\mathbb{R}_n[X]$ ), on a :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n \left\langle f, \frac{L_k}{\|L_k\|} \right\rangle \frac{L_k}{\|L_k\|} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2} L_k. \end{aligned}$$

On a alors, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $c_k = \frac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$ . □

**b.** Montrer que  $\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|L_k\|^2$ .

*Solution.* On utilise Pythagore. Comme  $f = f - T_n + T_n$  et que  $\langle f - T_n, T_n \rangle = 0$  par définition de la projection orthogonale, le théorème de Pythagore donne

$$\|f\|^2 = \|f - T_n\|^2 + \|T_n\|^2,$$

ou encore, (la base  $\left(\frac{L_k}{\|L_k\|}\right)_{0 \leq k \leq n}$  étant une b.o.n de  $\mathbb{R}_n[X]$ ), on a :

$$\begin{aligned} \|f - T_n\|^2 &= \|f\|^2 - \|T_n\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n \left\langle f, \frac{L_k}{\|L_k\|} \right\rangle^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|L_k\|^2 \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule demandée. □

**14.** On considère, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les polynômes  $P_k : x \mapsto (x^2 - 1)^k$  et  $Q_k = P_k^{(k)}$  ( $Q_k$  est ainsi obtenu en dérivant  $k$  fois  $P_k$ ). En particulier,  $Q_0 = P_0^{(0)} = P_0$ .

**a.** Montrer que  $Q_k$  est un polynôme de degré  $k$  et que son coefficient de plus haut degré vaut  $\frac{(2k)!}{k!}$ .

*Solution.* Soit  $k \in \mathbb{N}$ . La formule du binôme donne :

$$P_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} e_{2j}.$$

Le terme de plus haut degré de  $P_k$  est  $e_{2k}$ . Or  $e_{2k}^{(k)} = 2k(2k-1)\dots(2k-k+1)e_{2k-k} = \frac{(2k)!}{k!}e_k$ . On a bien que  $Q_k$  est de degré  $k$  de coefficient dominant  $\frac{(2k)!}{k!}$ . □

**b.** Expliciter les polynômes  $Q_0$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$ .

*Solution.* On applique la définition. Pour  $x \in \mathbb{R}$ .

- ✕ Pour  $k = 0$ , on a  $P_0(x) = 1$  et donc  $Q_0(x) = P_0^{(0)}(x) = P_0(x) = 1$ .
- ✕ Pour  $k = 1$ , on a  $P_1(x) = x^2 - 1$  et donc  $Q_1(x) = P_1'(x) = 2x$ .
- ✕ Pour  $k = 2$ , on a  $P_2(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$  et donc  $Q_2(x) = P_2''(x) = 12x^2 - 4$ .

□

**c.** i. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R} : P_1(x)P_k'(x) = 2ke_1(x)P_k(x)$ .

*Solution.* Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $P'_k(x) = 2kx(x^2 - 1)^{k-1} = 2ke_1(x)P_{k-1}(x)$ . Comme  $P_1P_{k-1} = P_k$ , on a le résultat.  $\square$

ii. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  fixé. En dérivant, à l'aide de la formule de Leibniz, la relation précédente à l'ordre  $k+1$ , montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1-x^2)Q''_k(x) - 2xQ'_k(x) + k(k+1)Q_k(x) = 0.$$

En déduire que  $Q_k$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $-k(k+1)$ .

*Solution.* On commence par observer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P_1^{(j)}(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } j = 0 \\ 2x, & \text{si } j = 1 \\ 2, & \text{si } j = 2 \\ 0, & \text{si } j \geq 3. \end{cases}, \quad \text{et} \quad P_k^{(k+1-j)} = \begin{cases} P_k^{(k+2)} = Q''_k, & \text{si } j = 0 \\ P_k^{(k+1)} = Q'_k, & \text{si } j = 1 \\ P_k^{(k)} = Q_k, & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Il suit qu'en appliquant la formule de Leibniz à l'ordre  $k+1$  à  $P_1P'_k$ , on a d'une part, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (P_1P'_k)^{(k+1)}(x) &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} P_1^{(j)}(x) P_k^{(k+1-j)}(x) = \sum_{j=0}^2 \binom{k+1}{j} P_1^{(j)}(x) P_k^{(k+1-j)}(x) \\ &= (x^2 - 1)Q''_k(x) + 2(k+1)xQ'_k(x) + 2 \frac{k(k+1)}{2} Q_k(x) \\ &= (x^2 - 1)Q''_k(x) + 2(k+1)xQ'_k(x) + k(k+1)Q_k(x). \end{aligned}$$

D'autre part, en observant que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad e_1^{(j)}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } j = 0 \\ 1, & \text{si } j = 1 \\ 0, & \text{si } j \geq 2. \end{cases}, \quad \text{et} \quad P_k^{(k+1-j)} = \begin{cases} P_k^{(k+1)} = Q'_k, & \text{si } j = 0 \\ P_k^{(k)} = Q_k, & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

et en appliquant maintenant Leibniz au membre de droite de la formule obtenue à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} (P_1P'_k)^{(k+1)}(x) &= 2 \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} k e_1^{(j)}(x) P_k^{(k+1-j)}(x) = 2 \sum_{j=0}^1 \binom{k+1}{j} k e_1^{(j)}(x) P_k^{(k+1-j)}(x) \\ &= 2kxQ'_k(x) + 2(k+1)kQ_k(x). \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$2kxQ'_k(x) + 2(k+1)kQ_k(x) = (x^2 - 1)Q''_k(x) + 2(k+1)xQ'_k(x) + k(k+1)Q_k(x)$$

ou encore

$$(x^2 - 1)Q''_k(x) + 2xQ'_k(x) - k(k+1)Q_k(x) = 0 \iff (1 - x^2)Q''_k(x) - 2xQ'_k(x) + k(k+1)Q_k(x) = 0$$

ce qu'on voulait !

Cette dernière égalité se réinterprète comme  $u(Q_k) = -k(k+1)Q_k$ .

Donc  $Q_k$  vecteur propre de  $u$  associé à  $-k(k+1)$ .  $\square$

iii. Conclure que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :  $L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k$ .

*Solution.* La remarque qui suit la Question 12. permet de voir que chaque  $L_k$  est de degré exactement  $k$  ( $(L_0)$  for une base de  $\mathbb{R}_0[X]$ ,  $(L_0, L_1)$  forme une base de  $\mathbb{R}_1[X]$ , etc...).

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a montré à la Question 11.c. que le sous-espace propre associé à  $-k(k+1)$  était de dimension 1 et que  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  formait une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  constituée de vecteurs propres de  $u$  ; il existe donc nécessairement un entier  $j$  tel quel  $Q_k$  et  $L_j$  sont colinéaires. Or,  $\deg(Q_k) = k$  et  $\deg(L_j) = j$  donc  $j = k$ .

Comme  $L_k$  est unitaire (c'est à dire de coefficient dominant égal à 1) et que le coefficient dominant de  $Q_k$  est  $(2k)!/k!$ , on a nécessairement que

$$Q_k = \frac{(2k)!}{k!} L_k.$$

□

d. Montrer par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall (f, g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x], \quad \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k)}(t)dt.$$

*Solution.* On procède comme demandé par récurrence. Introduisons, pour  $k \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}_k$  :

$$\forall (f, g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x], \quad \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k)}(t)dt.$$

✕ **Initialisation.** Montrons que  $\mathcal{P}_0$  est vraie. Soit  $(f, g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ . La plage de sommation du terme de droite étant vide, la somme correspondante vaut 0 et on a bien

$$\int_{-1}^1 f^{(0)}(t)g(t)dt = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt = (-1)^0 \int_{-1}^1 f(t)g^{(0)}(t)dt.$$

✕ **Hérédité.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  fixé. Supposons que  $\mathcal{P}_k$  soit vraie. Soit  $(f, g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ . Par IPP, on peut écrire

$$\int_{-1}^1 f^{(k+1)}(t)g(t)dt = [f^{(k)}(t)g(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g'(t)dt = [f^{(k)}(t)g(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g^{(k)}(t)dt.$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence au rang  $k$  aux fonctions  $f$  et  $g'$  (ce qu'on a le droit de faire car par HR, la formule marche pour tout couple de polynômes). On a alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g'(t)dt &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ f^{(k-1-j)}(t)g'^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g'^{(k)}(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ f^{(k-(j+1))}(t)g^{(j+1)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k+1)}(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left[ f^{(k-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k+1)}(t)dt \end{aligned}$$

En injectant ci-avant

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f^{(k+1)}(t)g(t)dt &= [f^{(k)}(t)g(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g'(t)dt \\ &= [f^{(k)}(t)g(t)]_{-1}^1 - \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left[ f^{(k-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k+1)}(t)dt \right) \\ &= [f^{(k)}(t)g(t)]_{-1}^1 + \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[ f^{(k-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 f(t)g^{(k+1)}(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \left[ f^{(k-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 f(t)g^{(k+1)}(t)dt, \end{aligned}$$

ce qui montre le caractère héréditaire de la propriété et termine la récurrence.

□

e. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  fixé.

i. Vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}, P_k^{(2k)}(x) = (2k)!$ .

*Solution.* Il suffit de dériver  $k$  fois  $Q_k$  qui est de degré  $k$  donc seul le terme de plus haut degré garde une contribution dans  $P_k^{(k)}$ . Comme  $e_k^{(k)} = k!e_0$ , et qu'on connaît le coefficient dominant de  $Q_k$  égal à  $(2k)!/k!$ , il reste bien  $P_k^{(k)} = (2k)!e_0$ .  $\square$

- ii. Montrer par récurrence que, pour tout  $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , il existe un polynôme  $R_{k,\ell}$  de degré inférieur ou égal à  $\ell$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k^{(\ell)}(x) = (x^2 - 1)^{k-\ell} R_{k,\ell}(x).$$

*Solution.* On note, pour  $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , la propriété  $\mathcal{H}_\ell$  : il existe un polynôme  $R_{k,\ell}$  de degré inférieur ou égal à  $\ell$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k^{(\ell)}(x) = (x^2 - 1)^{k-\ell} R_{k,\ell}(x).$$

✕ **Initialisation.** Pour  $\ell = 0$ , il suffit de prendre  $R_{k,0} = e_0$  donc  $\mathcal{H}_0$  est vérifiée.

✕ **Hérédité.** Soit  $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . On suppose que  $\mathcal{H}_\ell$  est vraie. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} P_k^{(\ell+1)}(x) &= \left(P_k^{(\ell)}\right)'(x) = 2(k-\ell)x(x^2-1)^{k-(\ell+1)}R_{k,\ell}(x) + (x^2-1)^{k-\ell}R'_{k,\ell}(x) \\ &= (x^2-1)^{k-(\ell+1)}(2(k-\ell)xR_{k,\ell}(x) + (x^2-1)R'_{k,\ell}(x)) \\ &= (x^2-1)^{k-(\ell+1)}R_{k,\ell+1}(x), \end{aligned}$$

où on a posé  $R_{k,\ell+1}(x) = 2(k-\ell)xR_{k,\ell}(x) + (x^2-1)R'_{k,\ell}(x)$ , formule qui définit bien une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $\ell+1$ . La propriété est héréditaire. La récurrence est terminée.  $\square$

- iii. En déduire que, pour tout  $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $P_k^{(\ell)}(-1) = P_k^{(\ell)}(1) = 0$  puis, à l'aide des résultats de la **Partie 1**, que

$$\|Q_k\|^2 = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1}, \quad \text{puis} \quad \|L_k\| = 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \binom{2k}{k}^{-1}.$$

*Solution.* Pour tout  $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la fonction polynomiale  $x \mapsto (x^2-1)^{k-\ell}$  s'annule en 1 et en  $-1$  d'où la première égalité demandée d'après la factorisation obtenue à la question précédente.

En appliquant le résultat de la Question **14.d.** avec  $f = g = P_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|Q_k\|^2 &= \int_{-1}^1 Q_k^2(t) dt = \int_{-1}^1 \left(P_k^{(k)}\right) \left(P_k^{(k)}\right)(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ P_k^{(k-1-j)}(t) P_k^{(j)} \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 P_k(t) P_k^{(k)}(t) dt \\ &= (2k)!(-1)^k \int_{-1}^1 (t^2-1)^k dt = (2k)! J_k \end{aligned}$$

Tous les crochets sont nuls car comme mentionné ci-avant, les polynômes s'annulent en  $-1$  et en  $1$ . D'après le résultat de la Question **5.** de la **Partie 1**, on a

$$\|Q_k\|^2 = (2k)! \times \frac{2(2^k k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1},$$

comme demandé ! D'après la Question **13.c.iii.**,  $L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k$  donc

$$\|L_k\| = \frac{k!}{(2k)!} \sqrt{\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1}} = 2^k \frac{k!k!}{(2k)!} \sqrt{\frac{2}{2k+1}} = 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \binom{2k}{k}^{-1}.$$

$\square$

# Problème 2

Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

La **Partie 2** peut être traitée indépendamment de la **Partie 1**, excepté pour la Question **20**. qui établit un lien entre un résultat observé à la Question **8**. et une propriété démontrée tout au long de la **Partie 2**.

## Partie 1 - Loi de Cauchy

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

1. Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité.

*Solution.* On vérifie les conditions du cours :

- ✗ Il est clair que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  car  $1+x^2 \geq 1 > 0$  et  $\pi \geq 0$ .
- ✗ Par inverse de fonction polynomiale qui ne s'annule pas,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- ✗ Comme  $f$  est clairement paire, on se ramène à l'étude de l'intégrale sur  $[0, +\infty[$  (qu'il suffit donc de montrer être convergente de valeur  $1/2$ ). On reconnaît la dérivée de la fonction arctan. Soit  $A > 0$ .

$$\int_0^A f(t)dt = \left[ \frac{1}{\pi} \arctan(x) \right]_0^A = \frac{1}{\pi} \arctan(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2},$$

ce qu'on voulait.  $f$  peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité. □

On note  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ . On dit que  $X$  suit la loi de Cauchy. On note  $F$  la fonction de répartition de  $X$ .

2. Montrer que  $X$  n'admet ni espérance, ni variance.

*Solution.* Par définition de l'existence de l'espérance et du fait que  $f$  est paire,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_0^{+\infty} t f(t) dt \text{ converge} \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)} dt \text{ converge} \end{aligned}$$

Or,  $\frac{t}{1+t^2} \sim \frac{1}{t}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge.

Par critère d'équivalence, on en conclut que  $X$  n'admet pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance. □

3. Donner, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'expression de  $F(x)$ . Montrer que  $F$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$  et préciser, pour tout  $y \in ]0, 1[$ , l'expression de  $F^{-1}(y)$ .

*Solution.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^x f(t) dt = \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \arctan(t) \right]_B^x \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Comme  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = f(x) > 0$ , elle est également strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et réalise donc une bijection (par le théorème de la bijection monotone) de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$  (c'est

une fonction de répartition, ses limites aux infinis en découlent immédiatement, mais on aurait pu le vérifier). De plus, pour tout  $y \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} F(x) = y &\iff \frac{1}{\pi} \left( \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right) = y \iff \arctan(x) = \pi y - \frac{\pi}{2} \\ &\iff x = \tan \left( \pi y - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

(en effet  $y \in ]0, 1[$  donc  $\pi y - \frac{\pi}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ).

On conclut donc que  $\forall y \in ]0, 1[$ ,  $F^{-1}(y) = \tan \left( \pi y - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{-\cos(\pi y)}{\sin(\pi y)}$ . □

4. a. Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $]0, 1[$ . Montrer que  $Y = F^{-1}(U)$  suit la même loi que  $X$ .

*Solution.* Question classique. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Observons que  $F(x) \in ]0, 1[$ . Par stricte croissance de  $F^{-1}$  (d'après le théorème de bijection, la bijection réciproque a le même sens de monotonie que  $F$ ), on a, par définition de la loi uniforme

$$P(Y \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Ainsi,  $Y$  et  $X$  suivent la même loi. □

- b. **Informatique.** Dédurre de la question précédente l'écriture d'une fonction **Python** d'en-tête `def cauchy()` : qui renvoie une simulation de  $X$ .

*Solution.* Il suffit d'utiliser les deux questions précédentes. C'est une simulation classique par *inversion*.

```
def cauchy() :
    u=rd.random() # on simule une loi uniforme
    x=-np.cos(np.pi*u)/np.sin(np.pi*u)
    return x
```

□

On note maintenant  $Z = \sqrt{|X|}$ . On **admet** que  $Z$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

5. Montrer que  $Z$  est une variable aléatoire à densité et expliciter une densité  $f_Z$  de  $Z$ .

*Solution.* Déterminons la fonction de répartition de  $Z$ , que l'on notera  $F_Z$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déjà, on voit que si  $x < 0$ , alors  $[Z \leq x] = \emptyset$  et donc  $F_Z(x) = 0$ . Considérons donc  $x \geq 0$ . Alors, comme la fonction  $\arctan$  est impaire,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) = P\left(\sqrt{|X|} \leq x\right) = P(|X| \leq x^2) \\ &= P(-x^2 \leq X \leq x^2) \\ &= F(x^2) - F(-x^2) = \frac{1}{\pi} (\arctan(x^2) - \arctan(-x^2)) \\ &= \frac{2}{\pi} \arctan(x^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan(x^2), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ceci définit clairement une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_-$  et sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi} \arctan(x^2) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_Z(x) = F_Z(0)$$

donc  $F_Z$  est bien continue en 0 et donc sur  $\mathbb{R}$  ; il s'agit de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité est obtenue en dérivant (là où on peut). Plus précisément, on a une densité avec la fonction  $f_Z$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{x}{1+x^4}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

□

6. Justifier que  $Z$  admet une espérance, mais pas de variance.

*Solution.* Comme précédemment

$$Z \text{ admet une espérance} \iff \int_0^{+\infty} t f_Z(t) dt \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{t^2}{1+t^4} dt \text{ converge}$$

Or,

$$\frac{t^2}{1+t^4} \sim \frac{1}{t^2}, \quad t \rightarrow +\infty$$

et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge (par Riemann). Par critère d'équivalence,  $Z$  admet une espérance. En revanche, comme

$$Z \text{ admet une variance} \iff \int_0^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{t^3}{1+t^4} dt \text{ converge}$$

et que

$$\frac{t^3}{1+t^4} \sim \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow +\infty$$

et que l'intégrale correspondante est divergente (comme cité ci-avant),  $Z$  n'admet pas d'espérance. □

7. Le but de cette question est de calculer explicitement  $E(Z)$ .

a. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x^2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

*Solution.* On procède par identification, pour  $x \geq 0$ ,

$$\frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{(\alpha + \beta)x^3 + \sqrt{2}(\alpha - \beta)x^2 + (\alpha + \beta)x}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$$

et donc

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x^2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ \sqrt{2}(\alpha - \beta) &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \beta &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right).$$

□

- b. Justifier que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$  convergent.

Obtenir, à l'aide d'un changement de variable affine que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

On **admet** qu'on peut obtenir de la même manière :  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.$

*Solution.* On remarque que les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{(x - \sqrt{2}/2)^2 + 1/2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

sont continues sur  $[0, +\infty[$ . Les intégrales sont seulement impropres en  $+\infty$ . On les compare alors à des intégrales de Riemann :

$$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \sim \frac{1}{x^2}, \quad x \rightarrow +\infty$$

et comme déjà mentionné  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  converge. Les deux intégrales sont donc bien convergentes.

Soit  $x \geq 0$ . On a

$$\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1}.$$

On pose alors  $u = \sqrt{2}x + 1$  (changement affine comme suggéré, donc licite et qui préserve la nature de l'intégrale) ce qui permet de faire apparaître la dérivée de arctan dont on connaît les limites en  $+\infty$ . On a  $du = \sqrt{2}dx$ . Il suit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \left( \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(A) - \arctan(1) \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

comme attendu ! □

- c. En observant que, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{\beta}{2} \left( \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right),$$

en déduire que  $E(Z) = \sqrt{2}$ .

*Solution.* On commence par voir que, pour  $x \geq 0$ ,  $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = x^4 + 1$ .  
Il suit que :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{4} \left( \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{\sqrt{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) dx \end{aligned}$$

Soit  $A > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_0^A \left( \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) dx &= \left[ \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \right]_0^A \\ &= \ln \left( \frac{A^2 - \sqrt{2}A + 1}{A^2 + \sqrt{2}A + 1} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

car  $\frac{A^2 - \sqrt{2}A + 1}{A^2 + \sqrt{2}A + 1} \sim \frac{A^2}{A^2} = 1$ ,  $A \rightarrow +\infty$ . Il suit que :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\ &= \frac{2}{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

ce qu'on n'est pas peu content d'avoir obtenu! □

- 8. Informatique.** On suppose écrite correctement la fonction de la Question 4.b. On dispose du programme ci-dessous dont l'exécution produit, après un temps certain, l'affichage ci-après. Comment interpréter cet affichage ? Quel résultat peut-on conjecturer ? À quel résultat du cours serait-on tenté de faire appel pour démontrer cette conjecture ? Pourquoi ne peut-on pas l'appliquer ? On détaillera le raisonnement.

```
def mystere(eps, n):
    L=np.zeros(1000)
    for k in range(1000):
        ech=np.zeros(n)
        for i in range(n):
            ech[i]=np.sqrt(np.abs(cauchy()))
        if np.abs(np.sum(ech)/n-np.sqrt(2)) <= eps :
            L[k]=1
    return np.sum(L)/1000

M=np.zeros([4,7])
eps=np.array([1, 0.5, 0.1, 0.05])
n=np.array([100, 500, 1000, 1500, 3000, 5000, 50000])
for i in range(4):
    for j in range(7):
        M[i,j]=mystere(eps[i], n[j])

print(M)
```

#### Affichage Python

```
> > >
[[0.99 1.  0.999 1.  1.  1.  1. ]
 [0.964 0.995 0.995 0.998 0.999 0.999 1. ]
 [0.411 0.725 0.846 0.903 0.965 0.988 0.997]
 [0.21 0.428 0.548 0.599 0.742 0.834 0.992]]
```

*Solution.* La fonction `mystere(eps, n)` simule 1000  $n$ -échantillons  $(Z_1, \dots, Z_n)$  de la variable  $Z = \sqrt{|X|}$ , calcule, à chacune des 1000 itérations, la moyenne empirique

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

de l'échantillon puis *test* si l'écart de celle-ci à  $\sqrt{2} = E(Z)$  est inférieur ou égal à `eps` ou non, en *stockant* une valeur 1 ou 0, ce qui revient à simuler 1000 variables de Bernoulli de paramètre

$$p = P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - \sqrt{2} \right| \leq \text{eps} \right).$$

En renvoyant la moyenne sur les 1000 simulations, la fonction `mystere` renvoie alors une *estimation* de cette probabilité, sachant que le cours affirme que la moyenne empirique d'un 1000-échantillon d'une v.a. de Bernoulli est un estimateur convergent du paramètre de la loi.

On évalue ensuite les variations de cette probabilité avec différentes valeurs de  $n$  et `eps` qu'on affiche.

On observe que les valeurs renvoyées (et affichées), pour chaque valeur de `eps`, se rapprochent de 1 lorsque  $n$  devient grand (et on observe vraiment le fait qu'on ait besoin d'un  $n$  assez grand si `eps` est petit).

C'est une définition de limite ! On peut conjecturer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - E(Z) \right| \leq \text{eps} \right) = 1$$

ce qui est le résultat connu sous le nom de loi faible des grands nombres... sauf qu'on ne peut *a priori* pas l'appliquer car  $Z$  n'admet pas de variance.

□

## Partie 2 - Variables indicatrices et une extension de théorème

Soit  $A$  un évènement. On appelle *variable aléatoire indicatrice* de l'évènement  $A$  la variable aléatoire notée  $\mathbb{1}_A$  définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}.$$

9. Reconnaître la loi de  $\mathbb{1}_A$ . Préciser son espérance et sa variance.

*Solution.* La définition de  $\mathbb{1}_A$  permet de voir que  $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$  ; c'est donc une variable aléatoire de Bernoulli. De plus

$$[\mathbb{1}_A = 1] \iff A \text{ est réalisé}$$

et donc  $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$  donc  $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$ . Par les formules du cours

$$E(\mathbb{1}_A) = P(A), \quad V(\mathbb{1}_A) = P(A)(1 - P(A)).$$

□

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On appelle *fonction indicatrice* de  $I$  la fonction notée  $\chi_I$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}.$$

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $g$  et  $s > 0$ .

10. a. Justifier que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{[X > s]}(\omega) = \chi_{]s; +\infty[}(X(\omega)).$$

*Solution.* Soit  $\omega \in \Omega$ . On a :

$$\begin{aligned} \chi_{]s; +\infty[}(X(\omega)) = 1 & \iff X(\omega) \in ]s, +\infty[ \\ & \iff X(\omega) > s \iff \omega \in [X > s] \\ & \iff \mathbb{1}_{[X > s]}(\omega) = 1 \end{aligned}$$

et on a bien l'égalité demandée.

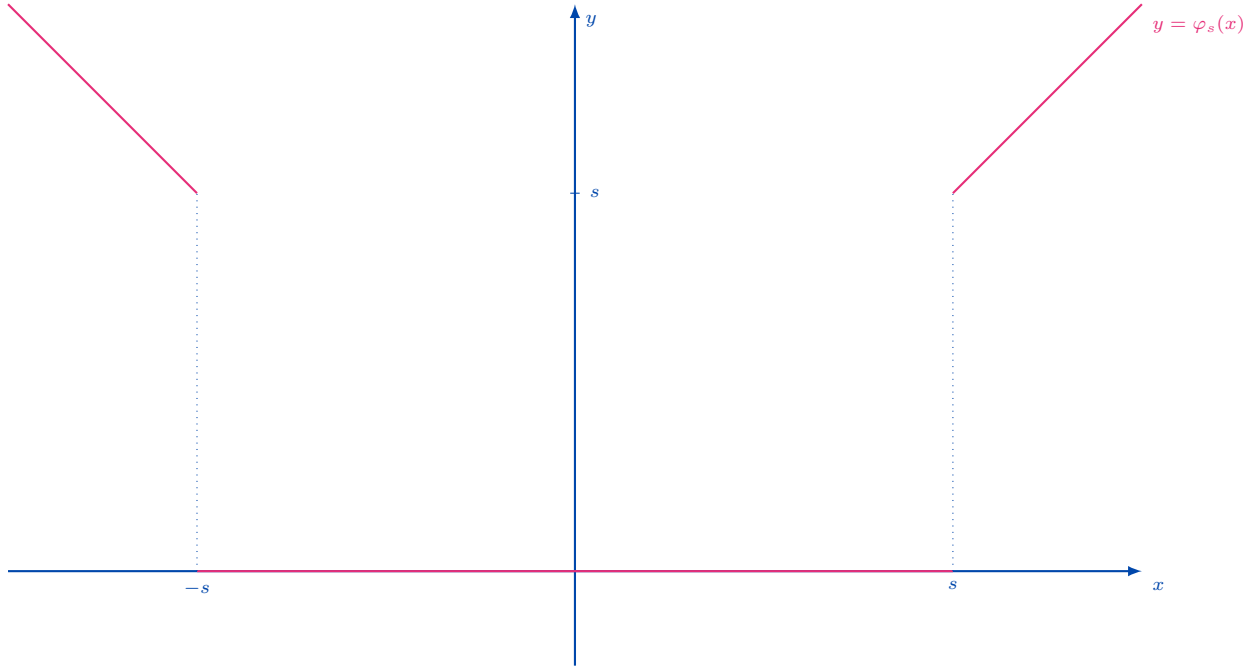
□

- b. Soit  $\varphi_s$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_s(x) = |x|\chi_{]s,+\infty[}(|x|)$ .  
 Tracer la courbe représentative de  $\varphi_s$ .  
 Donner sans justification les points de discontinuité de  $\varphi_s$ .

*Solution.* On peut réécrire l'expression de la fonction  $\varphi_s$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_s(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } |x| > s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} -x, & \text{si } x < -s \\ 0, & \text{si } -s \leq x \leq s \\ x, & \text{si } x > s \end{cases}$$

Il est alors facile de représenter la courbe de  $\varphi_s$  qui présente deux points de discontinuité : en  $s$  et en  $-s$ .



□

On suppose, dans toute la suite, que  $X$  admet une espérance, et que celle-ci est nulle. On souligne le fait qu'on **ne suppose pas** que  $X$  admet une variance.

On considère alors une suite  $(X_k)_{k \geq 1}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que  $X$ .

Soit  $M > 0$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on introduit les variables

$$Y_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]}, \quad \text{et} \quad Z_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k| > M]}.$$

Les variables aléatoires  $Y_k$  et  $Z_k$  sont donc définies comme produit de la variable aléatoire  $X_k$  avec une variable indicatrice.

On fera observer que les variables aléatoires  $Y_k$  et  $Z_k$  dépendent de  $M$ . Toutefois, pour alléger la rédaction, on a choisi de ne pas faire apparaître cette dépendance dans les notations.

11. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Quelle relation a-t-on entre  $X_k, Y_k$  et  $Z_k$ ?

*Solution.* Étant clair que  $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq M\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x| > M\} = \mathbb{R}$ , on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\chi_{]M,+\infty[}(|x|) + \chi_{[0,M]}(|x|) = 1,$$

ce qui entraîne, au vu de ce qui précède que

$$X_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]} + X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k| > M]} = Y_k + Z_k.$$

□

12. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $Y_k$  admet un moment d'ordre 2 et que  $E(Y_k^2) \leq M^2$ .

*Solution.* Par définition de  $Y_k$ , on a  $Y_k^2 = \mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]} X_k^2$ . Or,  $\mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]} \neq 0$  si et seulement si  $[|X_k| \leq M]$  est réalisé ce qui implique que  $[X_k^2 \leq M^2]$  est réalisé donc  $Y_k^2 \leq \mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]} M^2 \leq M^2$ .

Par principe de domination,  $Y_k^2$  admet une espérance (ou encore  $Y_k$  admet un moment d'ordre 2) et  $E(Y_k^2) \leq M^2$ .  $\square$

13. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

a. À l'aide des Questions 10.a. et 10.b., montrer que :  $\lim_{M \rightarrow +\infty} E(|Z_k|) = 0$ .

*Solution.* En reprenant les notations précédentes, et le résultat de la Question 10.a., on peut écrire  $|Z_k| = \varphi_M(X_k)$ . La fonction  $\varphi_M$  étant continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en un nombre fini de points, le théorème de transfert permet d'affirmer que

$$|Z_k| \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(t) f(t) dt \text{ converge absolument}$$

Or,  $\varphi_M$  est nulle sur  $[-M, M]$ , donc la convergence est ramenée à celle des intégrales

$$\int_{-\infty}^{-M} |t| f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_M^{+\infty} |t| f(t) dt.$$

Ces deux intégrales sont bien convergentes car par hypothèse  $X$  admet une espérance et elles tendent vers 0 car il s'agit des restes d'intégrales convergentes. On a bien

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} E(|Z_k|) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left( \int_{-\infty}^{-M} |t| f(t) dt + \int_M^{+\infty} |t| f(t) dt \right) = 0.$$

$\square$

b. En déduire que :  $\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Z_k) = 0$ .

*Solution.* Étant clair que  $-|Z_k| \leq Z_k \leq |Z_k|$ , on en déduit que  $-E(|Z_k|) \leq E(Z_k) \leq E(|Z_k|)$  et le théorème des gendarmes permet de conclure.  $\square$

c. Obtenir alors que :  $\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Y_k) = E(X_k) = 0$ .

*Solution.* Comme  $Y_k$  admet un moment d'ordre 2, elle admet aussi une espérance. On a déjà obtenu que  $X_k = Y_k + Z_k$  ce qui se réécrit  $Y_k = X_k - Z_k$ . Par linéarité de l'espérance, on peut donc écrire

$$E(Y_k) = E(X_k) - E(Z_k).$$

En passant à la limite lorsque  $M \rightarrow +\infty$  (gardons en tête que  $E(X_k)$  ne dépend pas de  $M$ ), on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Y_k) = E(X_k) = 0$$

car, par hypothèse  $E(X) = 0$ .  $\square$

Dans toute la suite, on considère  $t > 0$  et  $\varepsilon > 0$  fixés.

14. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$|x + y| > t \implies \left( \left[ |x| > \frac{t}{2} \right] \text{ ou } \left[ |y| > \frac{t}{2} \right] \right)$$

*Solution.* Raisonnons par contraposée. Supposons que  $|x| \leq \frac{t}{2}$  et que  $|y| \leq \frac{t}{2}$ . Alors, par inégalité triangulaire

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t,$$

ce qui est bien la conclusion souhaitée.  $\square$

15. On note alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad \bar{Y}_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \quad \text{et} \quad \bar{Z}_n = \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n}.$$

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(|\bar{X}_n| > t) \leq \mathbb{P}\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right).$$

*Solution.* Soit  $\omega \in \Omega$ . Comme  $\bar{X}_n = \bar{Y}_n + \bar{Z}_n$ , il suffit d'appliquer l'inégalité précédente avec  $x = \bar{Y}_n(\omega)$  et  $y = \bar{Z}_n(\omega)$  :

$$|\bar{X}_n(\omega)| > t \implies \left(|\bar{Y}_n(\omega)| > \frac{t}{2} \text{ ou } |\bar{Z}_n(\omega)| > \frac{t}{2}\right)$$

et donc on a une inclusion d'évènements :

$$[|\bar{X}_n| > t] \subset \left[|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right] \cup \left[|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right]$$

et donc, en passant aux probabilités (comme  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ ),

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > t) \leq \mathbb{P}\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right).$$

□

16. a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\mathbb{P}\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} \mathbb{E}(|Z_1|)$ .

*Solution.* On a envie d'appliquer Markov. Tout d'abord, par inégalité triangulaire, on a  $|\bar{Z}_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Z_k|$ .

Comme les  $|Z_k|$  ont toutes une espérance, il en est de même pour  $\sum_{k=1}^n |Z_k|$  et

$$\mathbb{E}(|\bar{Z}_n|) \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Z_k|\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|Z_k|) = \mathbb{E}(|Z_1|).$$

Comme  $|\bar{Z}_n|$  est à valeurs positives et admet une espérance, on peut bien appliquer l'inégalité de Markov qui donne

$$\mathbb{P}\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2\mathbb{E}(|\bar{Z}_n|)}{t} \leq \frac{2\mathbb{E}(|Z_1|)}{t}$$

comme demandé.

□

b. Montrer ensuite qu'il existe un réel  $M_1 > 0$ , tel que, si  $M \geq M_1$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

*Solution.* On sait que  $\mathbb{E}(|Z_1|) \rightarrow 0$ , lorsque  $M \rightarrow +\infty$ . Par définition de cette limite, il existe  $M_1 > 0$  tel que, pour tout  $M \geq M_1$ ,  $\mathbb{E}(|Z_1|) \leq \frac{t\varepsilon}{6}$ .

Par l'inégalité obtenue à la question précédente, a bien ce qu'on voulait.

□

17. a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(\bar{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(Y_i Y_j) \right).$$

*Solution.* Tout d'abord

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_n^2 &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=1}^n Y_k \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} Y_k Y_\ell \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq k, \ell \leq n \\ k=\ell}} Y_k Y_\ell + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq k, \ell \leq n \\ k < \ell}} Y_k Y_\ell + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq k, \ell \leq n \\ k > \ell}} Y_k Y_\ell \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum Y_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} Y_k Y_\ell
 \end{aligned}$$

On conclut à la formule demandée par linéarité de l'espérance.  $\square$

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \leq n(n-1)E(Y_1)^2.$$

*Solution.* Par indépendance des  $Y_i$ ,  $E(Y_i Y_j) = E(Y_i)^2 = E(Y_1)^2$ . Comme le nombre de couples  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  tels que  $i < j$  est exactement  $n(n-1)/2$ , on a tout de suite l'inégalité voulue qui est en fait une égalité.

**Remarque.** Par Cauchy-Schwarz, pour tout couple  $(i, j)$ , on a  $E(Y_i Y_j) \leq \sqrt{E(Y_i)E(Y_j)} = E(Y_1)^2$ , ce qui donne l'inégalité voulue.  $\square$

c. Obtenir ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{M^2}{n} + E(Y_1)^2.$$

*Solution.* On a obtenu que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E(Y_k^2) \leq M^2$ . En combinant avec les questions précédentes

$$\begin{aligned}
 E(\bar{Y}_n^2) &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=1}^n E(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \right) \\
 &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n M^2 + \frac{n(n-1)}{n^2} E(Y_1)^2 \\
 &\leq \frac{M^2}{n} + E(Y_1)^2.
 \end{aligned}$$

$\square$

d. Justifier l'existence d'un réel  $M_2 > 0$  tel que, si  $M \geq M_2$ , alors :

$$E(Y_1)^2 \leq \frac{t^2 \varepsilon}{12}.$$

*Solution.* D'après la Question 13.c.,  $\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Y_1^2) = 0$ . En revenant à la définition de limite, il existe donc  $M_2 > 0$  tel que, pour tout  $M \geq M_2$ ,

$$E(Y_1)^2 \leq \frac{t^2 \varepsilon}{12}.$$

$\square$

e. Obtenir alors que, si  $M \geq M_2$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

*Solution.* Soit  $M \geq M_2$ . On applique l'inégalité de Markov à la variable  $\bar{Y}_n^2$  qui admet une espérance et qui est à valeurs positives. Par croissance de la fonction carrée,

$$\begin{aligned} P\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) &\leq P\left(\bar{Y}_n^2 > \frac{t^2}{4}\right) \\ &\leq \frac{4E(\bar{Y}_n^2)}{t^2} \\ &\leq \frac{4}{t^2} \left(\frac{M^2}{n} + E(Y_1^2)\right) \leq \frac{4}{t^2} \left(\frac{M^2}{n} + \frac{t^2\varepsilon}{12}\right) \\ &\leq \frac{4M^2}{nt^2} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

□

18. Montrer que, si  $M \geq \max(M_1, M_2)$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2n} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

*Solution.* Soit  $M \geq \max(M_1, M_2)$ . D'après les Questions 15., 16.b. et 17.e.,

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n| > t) &\leq P\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) + P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \\ &\leq \frac{4M^2}{nt^2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \frac{4M^2}{t^2n} + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

□

19. Conclure qu'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n| > t) = 0.$$

*Solution.* On fixe  $M \geq \max(M_1, M_2)$ . L'inégalité obtenue à la question précédente étant vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la quantité  $\frac{4M^2}{t^2n} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , donc il existe  $n_0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0 \implies \frac{4M^2}{t^2n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , ou encore

$$P(|\bar{X}_n| > t) \leq \varepsilon.$$

C'est la définition de limite. On a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n| > t) = 0$ .

□

20. Interpréter ce résultat en le comparant à un résultat du cours que l'on citera explicitement.

Commenter alors à nouveau le résultat affiché par l'exécution du programme de la Question 8.

*Solution.* Considérons une variable  $Z$  à densité admettant une espérance. En appliquant le résultat de la question précédente à la variable  $X = Z - E(Z)$ , (et en observant que  $\bar{X}_n = \bar{Z}_n - E(Z)$ ), on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{Z}_n - E(Z)| \leq \varepsilon) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{Z}_n - E(Z)| > \varepsilon) = 1,$$

résultat *observé* empiriquement à la Question 8. et interprété comme une version de la loi faible des grands nombres avec une hypothèse affaiblie : pas besoin d'avoir une variance pour conclure au résultat. C'est ce qu'on vient de démontrer dans le cas d'une variable à densité.

□

