HEC-ESSEC 2025 - Mathématiques approfondies - Correction

Dans tout l'énoncé, n, m et p désignent trois entiers naturels non nuls avec $n \geqslant 4$ et $n \geqslant p$ et A et B deux matrices réelles fixées telles que $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. M désigne la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathrm{R})$ définie par $M = {}^tAA$ et on pose pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:
$$D(X) = MX - {}^tAY$$
On s'intéresse au problème d'optimination suivant : Minimiser $\frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \mu\|BX\|, X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,
où dans toute la suite, et sauf indication du contraire, $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne un vecteur fixé et μ un réel donné.
On dira que X réalise un minimum global d'une fonction G si $G(X)$ est un minimum global de G.

Partie I. – Autour de l'adjoint

Dans toute cette partie, E et F désignent deux espaces euclidiens de dimensions p et n respectivement. On note $\langle ., . \rangle_E$ le produit scalaire de E et $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de E. De même, on note $\langle ., . \rangle_F$ le produit scalaire de F et $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base orthonormale de F. Si G est un sous-espace vectoriel de E (respectivement de F) on note $G^\perp$ le supplémentaire orthogonal de G dans E (respectivement dans F).
On note u l'application linéaire de E dans F dont la matrice est A dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$; ainsi $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u)$.

1. Soit $\psi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ a \longmapsto \varphi_a = \left(x \longmapsto \langle x, a \rangle_E\right) \end{cases}$. On a clairement $\psi \in \mathscr{L}\left(E, \mathscr{L}(E, \mathbb{R})\right)$ par bilinéarité de $\langle ., . \rangle_E$.

De plus, si $a \in \ker(\psi)$ alors en particulier $\varphi_a(a) = \|a\|_E^2 = 0$ donc $a = 0$: donc ψ est injective.

Mais E a même dimension finie que $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ donc, via théorème du rang, ψ est bijective.

Alors $\boxed{a_0 = \psi^{-1}(\ell) \text{ est bien l'unique vecteur de } E \text{ tel que } \forall x \in E, \quad \ell(x) = \varphi_{a_0}(x) = \langle a_0, x \rangle_E.}$

2. Soit $y \in F$. Alors $g_y = \left(x \longmapsto \langle u(x), y \rangle_F\right) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

En posant $z_y = \psi^{-1}(g_y)$, on a bien, pour tout $x \in E, \quad g(x) = \langle z_y, x \rangle_E$, autrement dit

$$\boxed{\text{il existe un seul } z_y \in E \text{ tel que } \forall x \in E, \langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E \,.}$$

3. On a clairement $u^* = \underbrace{\psi^{-1}}_{\in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E,\mathbb{R}),E)} \circ \underbrace{\left(y \longmapsto g_y\right)}_{\in \mathscr{L}(F, \mathscr{L}(E,\mathbb{R}))} \in \mathscr{L}(F, E)$

L'application u^* s'appelle l'application adjointe de u. On a ainsi l'identité

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E \tag{1}$$

4. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!]$. Alors
$$\begin{aligned}
\langle u^*(f_i), e_j \rangle_E &= \left\langle \sum_{k=1}^{p} \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u^*)\right]_{k,i} e_k, e_j \right\rangle_E \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u^*)\right]_{k,i} \langle e_k, e_j \rangle_E \quad \text{lin. à gauche de } \langle ., . \rangle_E \\
&= \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u^*)\right]_{j,i} \quad \text{car } \mathscr{B}_E \text{ est orthonormale}
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\text{et } \langle u^*(f_i), e_j \rangle_E \underset{(1)}{=} \langle u(e_j), f_i \rangle_F &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u)\right]_{k,j} f_k, f_i \right\rangle_F \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u)\right]_{k,j} \langle f_k, f_i \rangle_F \quad \text{lin. à gauche de } \langle ., . \rangle_F \\
&= \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u)\right]_{i,j} \quad \text{car } \mathscr{B}_F \text{ est orthonormale}
\end{aligned}$$

On a bien, $\boxed{\forall (i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!], \quad \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u^*)\right]_{j,i} = \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u)\right]_{i,j} \text{ ou } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u) = {}^tA}$

On sait que $\boxed{\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left({}^tA\right) = \mathrm{rg}\left(u^*\right).}$

Et que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}\left((u^*)^*\right) = {}^t\left({}^tA\right) = A$ donc les matrices de u et $(u^*)^*$ relativement à $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ sont égales donc

$$\boxed{(u^*)^* = u}$$

5. Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}\left(u^*\right) \times \ker(u)$.

Soit alors $z \in F$ tel que $u^*(z) = y$. Ainsi $\langle x, y \rangle_E = \langle x, u^*(z) \rangle_E$
$$\underset{(1)}{=} \langle u(x), z \rangle_F = \langle 0_F, z \rangle_F = 0$$

Alors $\mathrm{Im}\left(u^*\right) \perp \ker(u)$ donc $\mathrm{Im}\left(u^*\right) \subset \left(\ker(u)\right)^\perp$.

Mais $\dim\left(\mathrm{Im}\left(u^*\right)\right) = \mathrm{rg}\left(u^*\right) = \mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim\left(\ker(u)\right) = \dim\left(\left(\ker(u)\right)^\perp\right)$ par théorème du rang.

Par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Im}\,(u^*) = (\ker(u))^{\perp}}$

6. A l'évidence, $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$.
Soit $x \in \ker(u^* \circ u)$.
Alors $u^* \circ u(x) = 0_E$ donc $0 = \langle u^* \circ u(x), x\rangle_E \underset{(1)}{=} \langle u(x), u(x)\rangle_F \Longrightarrow u(x) = 0 \Longrightarrow x \in \ker(u)$.

On a donc également $\ker(u^* \circ u) \subset \ker(u)$ et ainsi $\boxed{\ker(u^* \circ u) = \ker(u)}$

A nouveau, l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}\,(u^*)$ est claire.
Par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(u^* \circ u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u^* \circ u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\,(u^*)$.
Par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Im}\,(u^* \circ u) = \mathrm{Im}\,(u^*)}$

7. La linéarité de u, u^* et la stabilité de l'image d'un endomorphisme (en l'occurence $u^* \circ u$) par lui même garantissent que $w \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}\,(u^*))$.
Soit $x \in \ker(w)$. Alors $w(x) = 0_E$ et donc $0 = \langle w(x), x\rangle_E = \langle u^* \circ u(x), x\rangle_E \underset{(1)}{=} \langle u(x), u(x)\rangle_F \Longrightarrow u(x) = 0_F$.

Or $x \in \mathrm{Im}\,(u^*)$ ainsi $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}\,(u^*) = \{0_E\}$ car $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\ker(u))^{\perp}$.
Ainsi w est injective donc bijective en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie :

$$\boxed{w \text{ est un isomorphisme de } \mathrm{Im}\,(u^*)}$$

Matriciellement, cela se traduit en :

$$\boxed{\forall Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) : \quad {}^tA\, A\, {}^tA\, Y = {}^tA\, Z}$$

8. Soit π le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$ et Q sa matrice dans la base $\mathscr{B}_F$.

(a) Soit $x \in F$. On a alors
$$u^* \circ \pi(x) = u^*(\pi(x)) = u^*(x + \pi(x) - x) = u^*(x) + u^*(\underbrace{\pi(x) - x}_{\in (\mathrm{Im}(u))^{\perp}})$$

Or, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left((u^*)^*\right) = (\ker(u^*))^{\perp}$ selon **5.**. Donc $(\mathrm{Im}(u))^{\perp} = \ker(u^*)$ et ainsi $u^*(\underbrace{\pi(x) - x}_{\in (\mathrm{Im}(u))^{\perp}}) = 0_E$.

Autrement dit, pour tout $x \in F$, $\quad u^* \circ \pi(x) = u^*(x)$.

Matriciellement, on a bien $\boxed{{}^tAQ = {}^tA}$

(b) Soit $\mathscr{B}_u$ une base de $\mathrm{Im}(u)$ que l'on complète en $\mathscr{B}'_F$ une base de F par une base de $(\mathrm{Im}(u))^{\perp}$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_F}(\pi)$ est diagonale et sa diagonale comporte autant de 1 que la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ et des zéros ailleurs.
Donc $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_F}(\pi)\right) = \mathrm{rg}(u)$.

Par invariance de la trace pour des matrices semblables, $\boxed{\mathrm{Tr}(Q) = \mathrm{rg}(u).}$

9. $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible $\iff \mathrm{rg}(M) = p$.
Or $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\,({}^tAA) = \mathrm{rg}\,(u^* \circ u) \underset{\text{quest. 6.}}{=} \mathrm{rg}\,(u^*) \underset{\text{quest. 4.}}{=} \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A)$.

On a bien $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ est de rang égal à } p.}$

10. On suppose que le rang de A est égal à p.

(a) Soit $x \in F$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left(u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ u^*\right)(x) &= \left(u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ u^*\right)(\pi(x) + x - \pi(x)) \\
&= \left(u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ u^*\right)(\underbrace{\pi(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)}) + \left(u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ u^*\right)(\underbrace{x - \pi(x)}_{\in (\mathrm{Im}(u)^{\perp})}) \\
&= \left(u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ u^*\right)(u(y)) + \left(u \circ (u^* \circ u)^{-1}\right)\left(u^*(x - \pi(x))\right) \quad \text{où } y \in F \text{ tel que } u(y) = \pi(x) \\
&= \left(u \circ (u^* \circ u)^{-1}\right)(u^* \circ u(y)) + \left(u \circ (u^* \circ u)^{-1}\right)(0_E) \quad \text{selon } \textbf{5.} \text{ en raisonnant comme en } \textbf{8a.} \\
&= u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ (u^* \circ u)(y) \\
&= u(y) \underset{\text{déf.}}{=} \pi(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que $u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ u^* = \pi$ i.e. $\boxed{Q = A(M)^{-1}\,{}^tA}$

(b) Par exemple :

```
def Calcule_Q(A):
    if np.shape(A)[1] == al.matrix_rank(A):
        tA = np.transpose(A)
        M = np.dot(tA,A)
        return np.dot(A,np.dot(al.inv(M),tA))
    else:
        return "erreur"
```

11. Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ alors
$$\begin{aligned} {}^tXMX &= {}^tX{}^tAAX \\ &= {}^t(AX)\,AX \\ &= \langle AX, AX\rangle = \|AX\|^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

On a bien, $\boxed{\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXMX \geqslant 0}$

Partie II. – Minimisation d'une fonction quadratique

Dans cette partie, on s'intéresse à la minimisation de la fonction J_0, définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathrm{R})$ par :

$$J_0(X) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2, \text{ pour tout } X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathrm{R}).$$

12. Soit $(X, H) \in (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} 2\left(J_0(X+H) - J_0(X)\right) &= \|A(X+H) - Y\|^2 - \|AX - Y\|^2 \\ &= \underbrace{\|AX + AH\|^2}_{\|AX\|^2 + \|AH\|^2 + 2\langle AX, AH\rangle} + \|Y\|^2 - 2\langle AX + AH, Y\rangle - \|AX\|^2 - \|Y\|^2 + 2\langle AX, Y\rangle \\ &= 2\langle AX, AH\rangle + \|AH\|^2 - 2\langle AH, Y\rangle \\ &= 2\langle AX - Y, AH\rangle + \|AH\|^2 \\ &= 2\left\langle {}^tA(AX-Y), H\right\rangle + {}^tH{}^tAAH \\ &= 2\langle D(X), H\rangle + {}^tHMH \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\text{pour tout } X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ et tout } H \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) : \quad J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tHMH}$ (2)

13. Si $D(X) = 0$ alors pour tout $H \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ on a $J_0(X+H) - J_0(X) = {}^tHMH \geqslant 0$ selon **11.** donc J_0 admet bien un minimum global en X.

Supposons qu'à contrario, $D(X) \neq 0$. Notons $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow J_0(X + tD(X)) - J_0(X) \end{cases}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \left(\frac{1}{2}\,{}^tD(X)MD(X)\right)t^2 + \|D(X)\|^2 \cdot t.$

φ est une fonction trinôme de discriminant $\Delta_\varphi = \|D(X)\|^4 > 0$.

Donc φ n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}$ et en particulier il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) < 0$.

Dans ces conditions J_0 ne présente pas en X un minimum global.

On a bien $\boxed{J_0 \text{ possède un minimum global en un point } X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } D(X) = 0}$

14. Selon **7.**, $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! Z \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) : \quad {}^tA\,A\,{}^tA\,Z = {}^tA\,Y$ ou encore $M{}^tAZ = {}^tAY$.

On peut aussi écrire : $\exists! Z \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) : \quad D\left({}^tAZ\right) = 0$.

Or $(\ker(A))^\perp = \mathrm{Im}\left({}^tA\right)$ selon **5.**.

Ainsi $\boxed{\text{il existe } X_0 \in \ker(A)^\perp \text{ tel que } S_0 \cap \ker(A)^\perp = \{X_0\}.}$

15. **(a)**
$$\begin{aligned} X \in S_0 &\Longrightarrow MX = {}^tAY \\ &\Longrightarrow AM^{-1}MX = AM^{-1}{}^tAY \quad \text{car } M \text{ inversible} \\ &\Longrightarrow AX = QY \quad \text{car } AM^{-1}{}^tA = Q \text{ selon } \mathbf{10a.} \end{aligned}$$

On a bien : $\boxed{AX = QY}$ (3)

(b) $(X, X_0) \in S_0^2 \Longrightarrow {}^tAY = MX = MX_0 \Longrightarrow M(X - X_0) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Longrightarrow \boxed{X - X_0 \in \ker(M) = \ker(A)}$ selon **6.**.

Et alors $\|X\|^2 = \| \underbrace{X_0}_{\in(\ker(A))^\perp} + \underbrace{X - X_0}_{\in\ker(A)} \|^2 \underset{\text{Th. Pythagore}}{=} \|X_0\|^2 + \underbrace{\|X - X_0\|^2}_{>0 \text{ si } X\neq X_0}$.

Ainsi $\boxed{\text{si } X \neq X_0 \text{ alors } \|X\| > \|X_0\|}$

(c) Comme $\text{rg}(A) = p$ selon **9.**, M est inversible. Ainsi : $\boxed{X \in S_0 \iff MX = {}^tAY \iff X = M^{-1}\,{}^tAY}$ (4)

Et on a bien $\boxed{S_0 = \left\{M^{-1}\,{}^tAY\right\}}$

16. **(a)** Comme Q est la matrice d'une projection orthogonale relativement à une base orthonormale, $Q^2 = Q$ et ${}^tQ = Q$

Ainsi $\boxed{T = \|QZ\|^2 = \langle QZ, QZ\rangle = {}^tZ{}^tQQZ = {}^tZQZ}$

(b) Par exemple :

```
def simuleT(A,sigma):
    p = np.shape(A)[0]
    Z = rd.normal(0,sigma,p)
    W = np.dot(Calcule_Q(A),Z)
    return np.dot(W,W)
```

(c) Par exemple :

```
def esperanceT(A,sigma):
    return np.mean(np.array([simuleT(A,sigma) for k in range(10**4)]))
```

(d)
- Pour $i \in [\![1;3]\!]$ on a $\text{rg}(A) = p$ et il semble y avoir $\mathbb{E}(T) = p\sigma$ ou $\mathbb{E}(T) = p\sigma^2$.
- On a des approximations de $\mathbb{E}(T)$ pour la matrice A_1 et $\sigma \in [\![1;6]\!]$. Il semble que l'on ait $\mathbb{E}(T) = p\sigma^2$.

(e) $\boxed{\mathbb{E}\left(z_1^2\right) = \mathbb{V}(z_1) + (\mathbb{E}(z_1))^2 = \sigma^2}$.

Notons f la densité continue (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ de z_1.

Soit $k \in \{1;2\}$. Pour tout $M > 0$, les fonctions $t \longmapsto t^{k+1}$ et $-f$ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, M]$, on a par intégration par parties : $\displaystyle\int_0^M t^{k+2}f(t)\mathrm{d}t = \sigma^2\int_0^M t^{k+1}(-f'(t))\mathrm{d}t = \sigma^2\Big[t^{k+1}(-f(t))\Big]_0^M - \sigma^2\int_0^M (k+1)t^k(-f(t))\mathrm{d}t$

$$= -\sigma^2 M^{k+1}f(M) + (k+1)\sigma^2\int_0^M t^k f(t)\mathrm{d}t$$

Par croissances comparées, $\sigma^2 M^{k+1}f(M) \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$ et comme $\mathbb{E}(z_1^k)$ existe, par théorème de transfert, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t$ converge. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k+2}f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k+2}f(t)\mathrm{d}t = (k+1)\sigma^2\int_0^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k+2}f(t)\mathrm{d}t = (k+1)\sigma^2\int_0^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t$.

Par le changement de variable affine $u = -t$, ceci assure aussi la convergence et l'identité $\displaystyle(-1)^{k+2}\int_{-\infty}^0 u^{k+2}f(u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} t^{k+2}f(t)\mathrm{d}t$. Enfin, la fonction $t \longmapsto t^{k+2}f(t)$ étant de signe constant sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, on en déduit l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{k+2}f(t)\mathrm{d}t$. Par théorème de transfert on a donc l'existence de $\mathbb{E}\left(z_1^{k+2}\right)$ et l'identité $\mathbb{E}\left(z_1^{k+2}\right) = (k+1)\sigma^2\mathbb{E}\left(z_1^k\right)$.

On en déduit alors $\boxed{\mathbb{E}\left(z_1^3\right) = 0}$ et $\boxed{\mathbb{E}\left(z_1^4\right) = 3\sigma^4}$.

(f) On a : $T = \|QZ\|^2 = {}^tZQZ$ selon **16a.**

$$= \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^n Q_{1,j}z_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n Q_{n,j}z_j\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n z_i\sum_{j=1}^n Q_{i,j}z_j = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} Q_{i,j}z_iz_j$$

$$= \sum_{i=1}^n Q_{i,i}z_i^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i>j}} Q_{i,j}z_iz_j + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i<j}} Q_{i,j}z_iz_j$$

$$= \sum_{i=1}^n Q_{i,i}z_i^2 + 2\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i>j}} Q_{i,j}z_iz_j \qquad \text{car } {}^tQ = Q$$

On a bien $\boxed{T = T_1 + 2T_2}$

T_1 et T_2 admettent une espérance comme somme de variables aléatoires en admettant une. Et par linéarité :

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\mathbb{E}(z_i^2) = \sigma^2 \operatorname{Tr}(Q) = p\sigma^2 \quad \text{selon } \mathbf{8b.}$$

puis
$$\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j\right) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Q_{i,j}\mathbb{E}(z_i z_j) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Q_{i,j}\mathbb{E}(z_i)\mathbb{E}(z_j) \quad \text{par indépendance de } z_1,\ldots,z_n$$
$$= 0$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(T_1) = p\sigma^2,\ \mathbb{E}(T_2) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(T) = p\sigma^2}$

(g) On a $T_1T_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} Q_{k,k}Q_{i,j} z_k^2 z_i z_j$

T_1T_2 admet une espérance comme combinaison linéaires de variables admettant une espérance puisque $z_1,\ldots,z_n$ admettent des moments de tous ordres.

Or, pour tout $(i,j,k) \in [\![1;n]\!]^3$ tel que $j > i$, l'indépendance de $z_1,\ldots,z_n$ et le lemme des coalitions assure que z_j est indépendante de $z_k^2 z_i$ ou bien z_i est indépendantes de $z_k^2 z_j$. Dans tous les cas $\mathbb{E}(z_k^2 z_i z_j) = 0$ car les variables $z_1,\ldots,z_n$ sont centrées.

Par linéarité de l'espérance, on a bien : $\boxed{\mathbb{E}(T_1T_2) = 0}$

(h) Ces deux espérances existent par les mêmes arguments que précédemment et toujours par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(T_1^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}^2\mathbb{E}\left(z_i^4\right) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2\\ i\neq j}} Q_{i,i}Q_{j,j}\mathbb{E}\left(z_i^2 z_j^2\right)$$
$$= 3\sigma^4\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2\\ i\neq j}} Q_{i,i}Q_{j,j}\mathbb{E}\left(z_i^2\right)\mathbb{E}\left(z_j^2\right) = 3q\sigma^4 + \sigma^4\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}^2\right)$$
$$= 3q\sigma^4 + \sigma^4\left(\operatorname{Tr}(Q)^2 - q\right) = 3q\sigma^4 + \sigma^4\left(p^2 - q\right)$$

On a bien $\boxed{\mathbb{E}\left(T_1^2\right) = \sigma^4\left(2q + p^2\right)}$

Si $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$ alors $\mathbb{E}(z_i z_j z_k z_\ell) = \begin{cases} \mathbb{E}(z_i^2)^2 & \text{si } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 & \text{si } (i,j) = (k,\ell) \end{cases}$ par le lemme des coalitions puisque $z_1,\ldots,z_n$ sont indépendantes et centrées. En effet, si $i \neq k$ alors $\min(i,k) \notin \{\max(i,k), j, \ell\}$ donc $z_{\min(i,k)}$ est indépendante des 3 autres VAR du produit et $\mathbb{E}(z_i z_j z_k z_\ell) = \mathbb{E}(z_{\min(i,k)})\mathbb{E}(z_{\max(i,k)} z_j z_k) = 0$. Le raisonnement similaire si $k \neq \ell$. Ainsi :

$$\mathbb{E}\left(T_2^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Q_{i,j} z_i z_j\right)^2\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ 1\leqslant k<\ell\leqslant n}} Q_{i,j}Q_{k,\ell}\mathbb{E}(z_i z_j z_k z_\ell)$$
$$= \sigma^4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Q_{i,j}^2 = \frac{\sigma^4}{2}\left(\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} Q_{i,j}^2 - \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}^2\right) \quad \text{car } Q = {}^tQ$$
$$= \frac{\sigma^4}{2}\left(\operatorname{Tr}\left({}^tQQ\right) - q\right) = \frac{\sigma^4}{2}\left(\operatorname{Tr}(Q) - q\right) \quad \text{car } {}^tQQ = Q^2 = Q$$
$$= \frac{\sigma^4}{2}(p - q) \quad \text{selon } \mathbf{8b.}$$

On a bien $\boxed{\mathbb{E}\left(T_2^2\right) = \frac{\sigma^4}{2}(p-q)}$

(i) On en déduit que $\mathbb{E}(T^2) = \mathbb{E}\left((T_1 + 2T_2)^2\right) = \mathbb{E}(T_1^2) + 4\mathbb{E}(T_1T_2) + 4\mathbb{E}(T_2^2) = \sigma^4\left(2q + p^2\right) + 2\sigma^4(p-q) = \sigma^4(p^2 + 2p)$

Et donc $\boxed{\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2 = \sigma^4(p^2 + 2p) - p^2\sigma^4 = 2p\sigma^4}$

Comme T admet une variance et que pour tout $\alpha > 0$ on a $p\sigma^2\alpha > 0$, selon l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(|T - \mathbb{E}(T)| > p\sigma^2\alpha\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T)}{p^2\sigma^4\alpha^2} \iff \mathbb{P}\left(\left|T - p\sigma^2\right| > p\sigma^2\alpha\right) \leqslant \frac{2p\sigma^4}{p^2\sigma^4\alpha^2}$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(T - p\sigma^2 > p\sigma^2\alpha\right) \leqslant \frac{2p\sigma^4}{p^2\sigma^4\alpha^2} = \frac{2}{p\alpha^2} \quad \text{car } \left[T - p\sigma^2 > p\sigma^2\alpha\right] \subset \left[\left|T - p\sigma^2\right| > p\sigma^2\alpha\right]$$

On a bien $\boxed{\mathbb{P}\left(T > p\sigma^2(1+\alpha)\right) \leqslant \frac{2}{p\alpha^2}}$

Partie III. – Minimisation d'une fonction non différentiable

Dans cette partie, on suppose à nouveau que $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur fixé (et non une variable aléatoire). On s'intéresse désormais à la fonction J définie sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :

$$J(X) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \|BX\|, \text{ pour } X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}). \tag{4}$$

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{N}(X)$ l'ensemble

$$\mathscr{N}(X) = \left\{{}^tBV \mid V \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}), \|V\| \leqslant 1 \text{ et } \|BX\|V - BX = 0\right\}$$

17. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a : $\begin{aligned}\frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} &= \frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t\left(\|u+tv\| + \|u\|\right)} \quad \text{car } u \neq 0 \Longrightarrow \|u\| \neq 0 \\ &= \frac{\|u\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2 - \|u\|^2}{t\left(\|u+tv\| + \|u\|\right)} \\ &= \frac{2\langle u, v\rangle + t\|v\|^2}{\|u+tv\| + \|u\|}\end{aligned}$

Or $\|u+tv\| + \|u\| = \sqrt{\|u\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \sqrt{\|u\|^2} = \|u\|$ par continuité de la fonction racine carrée.

Ainsi, par opérations élémentaires sur les limites et puisque $\|u\| \neq 0$, on a bien :

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}} \tag{6}$$

18. Soit $H \in \mathscr{M}_{p,1}$. On définit la fonction : $\varphi_H : \begin{cases}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto J(X_0 + tH)\end{cases}$.

φ_H admet donc un minimum global sur $\mathbb{R}$ en 0.

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\quad \begin{aligned}\Delta_H(t) = \frac{\varphi_H(t) - \varphi_H(0)}{t} &= \frac{J_0(X_0+tH) - J_0(X_0)}{t} + \frac{\|BX_0 + tBH\| - \|BX_0\|}{t} \\ &\underset{(2)}{=} \frac{\langle D(X), tH\rangle + \frac{1}{2}\,{}^t(tH)M(tH)}{t} + \frac{\|BX_0 + tBH\| - \|BX_0\|}{t} \\ &= \langle D(X), H\rangle + \frac{t}{2}\,{}^tHMH + \frac{\|BX_0 + tBH\| - \|BX_0\|}{t} \\ &\underset{t \to 0}{\longrightarrow} \langle D(X), H\rangle + \frac{\langle BX_0, BH\rangle}{\|BX_0\|} \quad \text{via (6) car } BX_0 \neq 0\end{aligned}$

Donc φ_H est dérivable en 0 et $\varphi_H'(0) = \langle D(X), H\rangle + \frac{\langle BX_0, BH\rangle}{\|BX_0\|}$. Mais alors puisque φ_H admet un extremum en $0 \in \mathbb{R}$ (intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) on a $\boxed{\varphi_H'(0) = 0}$. En effet, $\Delta_H(t) \geqslant 0$ si $t > 0$ et $\Delta_H(t) \leqslant 0$ si $t < 0$. L''existence et l''unicité de la limite en 0 garantit que $\varphi_H'(0) = \lim\limits_{0} \Delta_H = 0$.

On en déduit que, $\forall H \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\quad \begin{aligned} &\varphi_H'(0) = \langle D(X_0), H\rangle + \frac{\langle BX_0, BH\rangle}{\|BX_0\|} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \|BX_0\|\langle D(X_0), H\rangle + \left\langle {}^tBBX_0, H\right\rangle = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \left\langle \|BX_0\|D(X_0) + {}^tBBX_0, H\right\rangle = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \|BX_0\|D(X_0) + {}^tBBX_0 \in (\mathrm{Vect}(H)))^{\perp}\end{aligned}$

Ceci étant réalisé pour tout $H \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ on en déduit $\|BX_0\|D(X_0) + {}^tBBX_0 = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$ et on a bien

$$\boxed{-D(X_0) = \tfrac{1}{\|BX_0\|}\,{}^tBBX_0}$$

Dès lors, $-D(X_0) = {}^tB\left(\frac{1}{\|BX_0\|}BX_0\right)$, et on a

- $\frac{1}{\|BX_0\|}BX_0 \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ car $B \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{R})$,
- $\left\|\frac{1}{\|BX_0\|}BX_0\right\| = \frac{1}{\|BX_0\|}\|BX_0\| = 1 \leqslant 1$,
- $\|BX_0\|\frac{1}{\|BX_0\|}BX_0 - BX_0 = 0$.

donc $\quad \boxed{-D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)}$

19. **(a)** Soit $H \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, en reprenant la fonction φ_H qui présente toujours un minimum global sur $\mathbb{R}$ en 0, on a donc puisque $BX_0 = 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \varphi_H(t) - \varphi(0) = t\,\langle D(X_0), H\rangle + \frac{t^2}{2}\,{}^tHMH + |t|\,\|BH\|$$
$$= \begin{cases} t\left(\langle D(X_0), H\rangle + \|BH\| + \frac{t}{2}\,{}^tHMH\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ -t\left(\|BH\| - \langle D(X_0), H\rangle - \frac{t}{2}\,{}^tHMH\right) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Ceci impose que les fonctions affines $t \longmapsto \langle D(X_0), H\rangle + \|BH\| + \frac{t}{2}\,{}^tHMH$ et $t \longmapsto \|BH\| - \langle D(X_0), H\rangle - \frac{t}{2}\,{}^tHMH$ prennent des valeurs positives en 0 id est : $\begin{cases} \langle D(X_0), H\rangle + \|BH\| \geqslant 0 \\ \|BH\| - \langle D(X_0), H\rangle \geqslant 0 \end{cases}$

On en déduit $\boxed{|\langle D(X_0), H\rangle| \leqslant \|BH\| \text{ et donc } \langle D(X_0), H\rangle \leqslant \|BH\|}$

(b) Soit $H \in \ker(B)$. Alors $-H \in \ker(B)$ également et l'inégalité précédente pour H et $-H$ garantissent que $\langle D(X_0), H\rangle = 0$ donc $\boxed{D\,(X_0) \in \ker(B)^{\perp}}$

(c) On sait que $D\,(X_0) \in \ker(B)^{\perp} = \operatorname{Im}({}^tB)$ selon **5.** donc $\boxed{\text{il existe un vecteur } W \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } D\,(X_0) = {}^tBW}$

(d) Selon **6.** on dispose de $\operatorname{Im}({}^tB) = \operatorname{Im}({}^tBB)$ et en vertu du résultat précédent

$$\boxed{\text{il existe un vecteur } V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } D\,(X_0) = {}^tBBV}$$

(e) L'inégalité de **19a.**, valable pour tout $H \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ létoci pour $H = V$ et produit $\|BV\|^2 \leqslant \|BV\|$ qui impose $\|BV\| = 0$ ou $\|BV\| \leqslant 1$ qui dans les deux cas assurent $\boxed{\|BV\| \leqslant 1}$

Ces derniers résultats montrent que, lorsque $BX_0 = 0$, on a encore $\boxed{-D\,(X_0) \in \mathscr{N}\,(X_0)}$

20. **(a)** On a
$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\langle u, v\rangle - \left(\|u\|^2 + 2\,\langle u, v\rangle + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}\right)$$
$$= \|v\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

et donc : $$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \frac{\|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

(b) Ceci est valable et utilisé dans la suite pour $E = \mathbb{R}^q$ où $q \in \{n, m, p\}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$ et $u \neq 0$.

- Si la famille (u, v) est liée, comme $u \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v = \alpha x$.
  Ainsi $\|u+v\| - \|u\| - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} = (|1+\alpha| - 1 - \alpha)\,\|u\| = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geqslant -1 \\ -2(\alpha+1)\,\|u\| > 0 & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$.
  Donc, si (u, v) est liée alors $\|u+v\| - \|u\| \geqslant \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$.
- Supposons maintenant (u, v) libre.
  Remarquons que $\frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} > 0$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec (u, v) libre.
  Donc $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \left(\|u+v\| - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)\right)\left(\|u+v\| + \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)\right) > 0$.
  Or, $\|v\| = \|u+v+(-u)\| \leqslant \|u+v\| + \|u\|$ alors que $\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} < \|v\|$ selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz encore et avec (u, v) libre.
  Ainsi $\|u+v\| + \|u\| \geqslant \|v\| > \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$ id est $\|u+v\| + \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right) > 0$.
  On a donc $\|u+v\| - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right) > 0$ id est $\|u+v\| - \|u\| > \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$.

Finalement, dans tous les cas on a bien
$$\boxed{\|u+v\| - \|u\| \geqslant \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}} \tag{7}$$

21. **(a)**
- Si $\|BX_0\| = 0$ alors $BX_0 = 0$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle W, X - X_0\rangle &= {}^tW\,(X - X_0)\\
&= {}^tVB\,(X - X_0) \qquad \text{car } W \in \mathscr{N}(X_0) \Longrightarrow \exists V \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } W = BV \text{ et } \|V\| \leqslant 1\\
&= {}^tVBX - {}^tVBX_0 = {}^tVBX\\
&= \langle V, BX\rangle\\
&\leqslant \|V\|\,\|BX\| \qquad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}\\
&\leqslant \|BX\| \qquad \text{car } \|V\| \leqslant 1\\
&= \|BX\| - \|BX_0\| \qquad \text{car } \|BX_0\| = 0
\end{aligned}$$

- Si $\|BX_0\| \neq 0$, $\quad \|BX\| - \|BX_0\| = \|BX_0 + B(X - X_0)\| - \|BX_0\|$

$$\begin{aligned}
&\underset{(7)}{\geqslant} \frac{\langle BX_0, B(X - X_0)\rangle}{\|BX_0\|} = \frac{\langle {}^tBBX_0, X - X_0\rangle}{\|BX_0\|}\\
&= \frac{\langle \|BX_0\|\,W, X - X_0\rangle}{\|BX_0\|} \qquad \|BX_0\|\,V = BX_0 \text{ avec } W = {}^tBV \text{ puisque } W \in \mathscr{N}(X_0)\\
&= \langle W, X - X_0\rangle
\end{aligned}$$

Dans tous les cas on a bien $\boxed{\|BX\| - \|BX_0\| \geqslant \langle W, B(X - X_0)\rangle}$

(b) On a $\quad J(X) - J(X_0) = J_0(X_0 + (X - X_0)) - J_0(X_0) + \|BX\| - \|BX_0\|$

$$\begin{aligned}
&\underset{(2)}{=} \langle D(X), X - X_0\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{{}^t(X - X_0)\,M\,(X - X_0)}_{\geqslant 0 \text{ selon } \mathbf{11.}} + \underbrace{\|BX\| - \|BX_0\|}_{\geqslant \langle W, B(X - X_0)\rangle}\\
&\geqslant \langle D(X), X - X_0\rangle + \langle W, B(X - X_0)\rangle\\
&= \langle D(X) + W, X - X_0\rangle
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{J(X) - J(X_0) \geqslant \langle D(X_0) + W, X - X_0\rangle\,.} \tag{8}$$

22. Si $-D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)$ la relation précédente est valable en particulier pour $W = -D(X_0)$ ce qui donne immédiatement $J(X) - J(X_0) \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, donc $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalise un minimum global de J.
On a déjà vu précédemment, en **18.** et **19e.**, si $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalise un minimum global de J alors $-D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)$.
On a bien : $\boxed{X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ réalise un minimum global de } J \text{ si et seulement si } -D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)}$

23. **(a)** Soit $\lambda \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
F(\lambda) + 1 - \frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{k} y_i^2 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} - \frac{y_i^2}{4\lambda} = \frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{k} \frac{4\lambda\alpha_i^2 y_i^2 - (\lambda y_i + \alpha_i^2 y_i)^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2}\\
&= \frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{k} \frac{4\lambda\alpha_i^2 y_i^2 - \lambda^2 y_i^2 - \alpha_i^4 y_i^2 - 2\lambda\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} = \frac{-1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda^2 y_i^2 + \alpha_i^4 y_i^2 - 2\lambda\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2}\\
&= \frac{-1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda y_i - \alpha_i^2 y_i)^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2}
\end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$ il est clair que $\boxed{\forall \lambda \in]0, +\infty[, \quad F(\lambda) \leqslant -1 + \frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{k} y_i^2.}$

(b) F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(\lambda) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{2\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^3} < 0$
car $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont tous non nuls (énoncé) et comme $y_1, \ldots, y_k$ ne sont pas tous nuls sinon $\rho(Y) = 0$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = -1$ et pour tout $i \in [\![1; k]\!]$, $\quad \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} \frac{y_i^2}{\alpha_i^2}$ ainsi, par somme $F(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to 0^+]{} -1 + \rho(\lambda) > 0$
F est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]-1, \rho(\lambda) - 1[$ qui contient 0. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \lambda_0 \in]0, +\infty[\text{ tel que } F(\lambda_0) = 0.}$$

En particulier λ_0 réalise l'inégalité de la question précédente d'où $F(\lambda_0) = 0 \leqslant -1 + \frac{1}{4\lambda_0}\sum_{i=1}^{k} y_i^2 \underset{\lambda_0 > 0}{\Longleftrightarrow} \boxed{\lambda_0 \leqslant \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} y_i^2}.$

(c) Conformément à **22.** il suffit de prouver que $-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)$.
Comme $A = I_n$, $M = {}^tAA = I_n$ donc $-D(X_0) = -MX_0 + {}^tAY = -X_0 + Y = BV = {}^tBV$. (9)

$$\boxed{\exists V \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}), -D(X_0) = {}^tBV}$$

- **Si $\rho(Y) \leqslant 1$.**

  Alors $\beta = 0$ et on a : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $v_i = \begin{cases} \frac{y_i}{|\alpha_i|} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } k+1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$

  Ainsi $\|V\|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\alpha_i^2}$
  $= \rho(Y) \leqslant 1$

  $$\boxed{\|V\| \leqslant 1}$$

  Par ailleurs, $BX_0 = BY - B^2V = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1 \\ \vdots \\ \alpha_k y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \times \frac{y_1^2}{\alpha_1^2} \\ \vdots \\ \alpha_k^2 \times \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

  Et alors $\boxed{\|BX_0\| \, V = BX_0}$

  Bref, $\boxed{\text{si } \rho(Y) \leqslant 1 \text{ alors } -D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)}$

- **Si $\rho(Y) > 1$.**

  On a alors $\beta = \lambda_0$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 y_1}{\lambda_0 + \alpha_1^2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_k y_k}{\lambda_0 + \alpha_k^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et ainsi $\|V\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{\left(\lambda_0 + \alpha_i^2\right)^2} = F(\lambda_0) + 1 = 1$

  $$\boxed{\|V\| \leqslant 1}$$

  Par ailleurs, $BX_0 = BY - B^2V = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1 \\ \vdots \\ \alpha_k y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \times \frac{\alpha_1 y_1}{\lambda_0 + \alpha_1^2} \\ \vdots \\ \alpha_k^2 \times \frac{\alpha_k y_k}{\lambda_0 + \alpha_k^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1 - \alpha_1^2 \times \frac{\alpha_1 y_1}{\lambda_0 + \alpha_1^2} \\ \vdots \\ \alpha_k y_k - \alpha_k^2 \times \frac{\alpha_k y_k}{\lambda_0 + \alpha_k^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 y_1 \lambda_0}{\lambda_0 + \alpha_1^2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_k y_k \lambda_0}{\lambda_0 + \alpha_k^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

  Ainsi $\|BX_0\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2 \lambda_0^2}{\left(\lambda_0 + \alpha_k^2\right)^2} = \lambda_0^2 \left(1 - F(\lambda_0)\right) = \lambda_0^2$

  Et comme il s'agit de réels positifs, $\|BX_0\| = \lambda_0$ et donc $\|BX_0\| \, V = BX_0$

  Ainsi $\boxed{\text{si } \rho(Y) > 1 \text{ alors } -D(X_0) \in \mathscr{N}(X_0)}$

On a bien $\boxed{X_0 \text{ réalise un minimum global de } J}$

(d) **i.** Par exemple :

```
def FoncSom(alpha, Y,lda):
    k = np.shape(alpha)[0]
    Numer = Y[:k]**2
    Denom = alpha**2 + lda
    return -1 + np.sum(Numer / Denom)
```

ii. Par exemple :

```
def CalcLmbda(alpha,Y,epsilon):
    a = 0
    b = np.sum(Y**2)/4
    while b - a > epsilon / 2:
        if FoncSom(alpha , Y , (a+b)/2) > 0: a = (a + b)/2
        else:                                b = (a + b)/2
    return (a + b)/2
```

iii. Par exemple en utilisant l'expression de X_0 obtenue en **23c.** via (9) :

```
def CalcSolution(alpha, Y, epsilon):
    k = np.shape(alpha)[0]
    n = np.shape(Y)[0]
```

```
rho = np.sum(Y[:k]**2 / alpha)
if rho > 1: beta = CalcLmbda(alpha,Y,epsilon)
else :      beta = 0
B = np.zeros((n,n))
for i in range(k): B[i,i] = alpha[i]
V = np.zeros(n)
for i in range(k):
    V[i] = alpha[i]*Y[i]/(beta + alpha[i]**2)
return Y - np.dot(B,V)
```