

Chap. 2 - Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1

$$\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^n)$$

1. la famille $\mathcal{B}$ est formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, c'est donc une famille libre. De plus $\text{Card}(\mathcal{B}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $k \in [0, n]$.

$$\begin{aligned} X^k &= (X-1+1)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X-1)^i \quad (\text{binôme}) \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(X^k) = \begin{pmatrix} \binom{k}{0} \\ \binom{k}{1} \\ \binom{k}{2} \\ \vdots \\ \binom{k}{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X-1 \\ (X-1)^2 \\ \vdots \\ (X-1)^k \\ (X-1)^{k+1} \\ \vdots \\ (X-1)^n \end{pmatrix}$$

3.

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{C} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. $\forall k \in [0, n]$, $(X-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i$ (binôme).

REVISIONS ALGÈBRE (1)

D'ail :

$$* P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^k & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \dots & (-1)^{k-1} \binom{k}{1} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{k-2} \binom{k}{2} & \dots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \\ 1 & X-1 & (X-1)^2 & \dots & (X-1)^k & \dots & (X-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^k \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X-1 &= -1 + X \\ (X-1)^2 &= 1 - 2X + X^2 \end{aligned}$$

* D'après le 2.,

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \binom{k}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{k}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k}{k-1} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^k & \dots & X^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X-1 \\ (X-1)^2 \\ \vdots \\ (X-1)^k \\ \vdots \\ (X-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : noyau et image.

CLASSIQUE

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$(a) \text{Ker}(f) = E \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E, F)} : \text{application nulle}$$

$\text{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow f \text{ est injective (cons)}$

(b) • $\text{Im}(f) = F \Leftrightarrow f \text{ est surjective (cons)}$

• $\text{Im}(f) = \{0_F\} \Leftrightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$
 $\Leftrightarrow f \text{ est l'application nulle}$

2. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

* Montrons que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$: $\exists x \in E / y = g \circ f(x)$.

Alors $y = g(f(x))$ donc $y \in \text{Im}(g)$.

D'où l'inclusion.

* Montrons que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$.

Alors $f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) = 0$
 $\uparrow$
 car g linéaire

donc $x \in \text{Ker}(g \circ f)$.

D'où l'inclusion.

3. On suppose que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrons que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$: $\exists x \in E / y = f(x)$.

Alors $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_E$
 $\uparrow$ car $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 donc $y \in \text{Ker}(g)$.

D'où l'inclusion.

4. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f \circ f = 2f$.

Montrons que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \text{Im}(f)$ par double inclusion.

$\subset$: soit $x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.

Alors $(f - 2\text{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 2x$

$\Leftrightarrow x = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

donc $x \in \text{Im}(f)$.

Ainsi $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Im}(f)$.

$\supset$: soit $x \in \text{Im}(f)$: $\exists t \in E / x = f(t)$.

Alors

$(f - 2\text{Id}_E)(x) = f(x) - 2x$

$= f \circ f(t) - 2f(t)$

$= 2f(t) - 2f(t)$ car $f \circ f = 2f$

$= 0$ donc $x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$

D'ai $\underline{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)}$

Conclusion: par double inclusion, on a bien montré que $\underline{\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = \text{Im}(f)}$

5. On suppose que $\dim(E) = 2n$, que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\text{rg}(f) = n$.

Montrons que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

* Soit $x \in \text{Im}(f)$: $\exists t \in E / x = f(t)$.

Alors $f(x) = f^2(t) = 0_E$ car $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

D'ai $x \in \text{Ker}(f)$. Cela montre que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

* $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = n$.

D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim(E)$$

$$\Leftrightarrow \dim \text{Ker}(f) + n = 2n \Leftrightarrow \dim \text{Ker}(f) = n$$

Comme $\begin{cases} \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \\ \dim \text{Im}(f) = \dim \text{Ker}(f) \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{une inclusion et} \\ \text{l'égalité des} \\ \text{dimensions} \end{array} \right.$

on a bien $\underline{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)}$

Exercice 3

Les polynômes de Lagrange.

CLASSIQUE

1. Si $n = 2$,

$$p_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} (X - x_1)(X - x_2)$$

$$p_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} (X - x_0)(X - x_2)$$

$$p_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (X - x_0)(X - x_1)$$

2. $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(p_k) = n$

(car n termes apparaissent dans le produit).

3. (a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1^{er} cas: si $i \neq k$, le terme $(X - x_i)$ apparaît dans le produit et donc $p_k(x_i) = (x_i - x_i) \times \dots = 0$

2^{ème} cas: si $i = k$,

$$p_k(x_k) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{1}{x_k - x_j} (x_k - x_j) = 1$$

Ainsi $p_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$

(b) * Montrons que $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n = 0.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \dots + \lambda_n p_n(x) = 0.$$

D'après le 3. (a):

• en évaluant en x_0 , comme $p_0(x_0) = 1$
et $p_1(x_0) = \dots = p_n(x_0) = 0$,

on obtient $\lambda_0 = 0$

• en évaluant en x_1 , on obtient de même $\lambda_1 = 0$

etc...

• en évaluant en x_n , on obtient $\lambda_n = 0$.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$: la famille est libre.

* De plus $\text{Card}(p_0, p_1, \dots, p_n) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$
donc $\mathcal{B}' = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $R = Q - \sum_{k=0}^n Q(x_k) p_k$.

(a) $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$R(x_i) = Q(x_i) - \sum_{k=0}^n Q(x_k) \underbrace{p_k(x_i)}_{\substack{= 0 \text{ si } i \neq k \\ = 1 \text{ si } i = k}}$$

D'ai

REVISIONS ALGÈBRE (4)

$$R(x_i) = Q(x_i) - Q(x_i) = 0.$$

(b) $\deg(Q) \leq n$ et $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\deg(p_k) \leq n$
d'ai $\deg(R) \leq n$.

De plus R admet $n+1$ racines distinctes $x_0, x_1, \dots, x_n$
donc $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$: R est le polynôme nul.

(c) On en déduit que $Q = \sum_{k=0}^n Q(x_k) p_k$
donc la matrice des coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}'$
est:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(Q) = \begin{pmatrix} Q(x_0) \\ Q(x_1) \\ \vdots \\ Q(x_n) \end{pmatrix} \begin{matrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix}$$

5. Notons $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{matrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix}$$

6. Soit

$$\varphi: p \mapsto (p(x_0), p(x_1), \dots, p(x_n))$$

$$\mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

(a) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(x_0), \dots, (\lambda P + Q)(x_{n+1}) \\ &= (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \dots, \lambda P(x_{n+1}) + Q(x_{n+1})) \\ &= \lambda (P(x_0), \dots, P(x_{n+1})) + (Q(x_0), \dots, Q(x_{n+1})) \\ &= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

donc φ est linéaire et va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+2}).$$

(b) * Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors

$$\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow P(x_0) = P(x_1) = \dots = P(x_{n+1}).$$

P est de degré $\leq n$ et admet $n+2$ racines distinctes, donc nécessairement $P = 0$.

D'au $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.

* Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+2}$ et φ est injective, φ est bijective.

ou th. du rang : $\dim \text{Im}(\varphi) = n+1$
et $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ d'au $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{n+2}$
donc φ surjective.

Ainsi φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(c) Notons $\mathcal{D}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+2}$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{D}, \mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+2} \end{matrix}$$

$\varphi(1) \varphi(x) \varphi(x^2) \dots \varphi(x^{n+1})$

$$(d) \quad \varphi(P_0) = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\varphi(P_1) = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

etc...

$$\varphi(P_n) = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

$$\text{d'au } \text{Mat}_{\mathcal{D}, \mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_{n+2}$$

on obtient la matrice unité!

Exercice 4

$$\begin{aligned}1. \quad F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y - 4z\} \\ &= \{(3y - 4z, y, z) / (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y \cdot (3, 1, 0) + z \cdot (-4, 0, 1) / (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((3, 1, 0), (-4, 0, 1))\end{aligned}$$

F est donc un sev de $\mathbb{R}^3$.

la famille $\mathcal{B}_F = ((3, 1, 0), (-4, 0, 1))$ est génératrice de F .

Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires donc $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\dim(F) = 2$.

* $G = \text{Vect}((1, 0, 0))$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

la famille $\mathcal{B}_G = ((1, 0, 0))$ est génératrice de G et libre car formée d'un unique vecteur non nul.

Il s'agit donc d'une base de G et $\dim(G) = 1$.

2. Pour montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant la base $\mathcal{B}_F$ de F et la base $\mathcal{B}_G$ de G est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{B} = ((3, 1, 0), (-4, 0, 1), (1, 0, 0))$.

Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en intervertissant les lignes}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1 + 4l_2$$

$= 3$

$\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})) = 3$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Ainsi $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Autres méthodes :

- Montrer que $\mathcal{B}$ est libre + $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
- Montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ + $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Exercice 5

$$\begin{aligned} * F &= \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a - b \text{ et } d = a - b \} \\ &= \{ (a, b, a - b, a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \text{Vect}(u, v) \quad \text{à} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans F est un sev de $\mathbb{R}^4$.

la famille $\mathcal{B}_F = (u, v)$ est génératrice de F .

Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est une base de F et $\dim F = 2$

* $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.

$\mathcal{B}_G = (w, t)$ où $w = (1, 1, 1, 1)$, $t = (1, 0, 1, 0)$
est génératrice de G . Elle est libre car [...] $\dim(G) = 2$.

2. Pour montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$, il suffit de
montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w, t)$ obtenue
en concaténant $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= 4$$

Dans B est inversible et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

D'où $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

Exercice 6

1. Montrer que F est un sev de l'es $\text{Ap}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des
applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (1) $F \subset \text{Ap}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(2) $0_{\text{Ap}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in F$ car l'application nulle est faïve

(3) $\forall (f, g) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) \\ = \lambda f(x) + g(x)$$

car f et g sont faïves

Donc $\lambda f + g \in F$.

Ainsi F est un sev de $\text{Ap}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2ème méthode : G sev de $\text{Ap}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. Pour montrer que $E = F \oplus G$, nous allons montrer que $\forall f \in E, \exists (g, h) \in F \times G \mid f = g + h$.

Pour cela nous travaillerons par analyse et synthèse.

Soit $f \in E$.
Analyse: supposons qu'il existe $g \in F$ et $h \in G$

telles que $f = g + h$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$ car g paire et h impaire

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Synthèse: avec les fonctions g et h ci-dessus:

* $g + h = f$

* g est paire car $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$

* h est impaire car $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$

Donc g et h canoniquement.

Conclusion: $\forall f \in E, \exists! (g, h) \in F \times G \mid f = g + h$

Donc $\underline{F \oplus G = E}$

Résumé: seule méthode car on travaille en dimension infinie.

REVISIONS ALGÈBRE (8)

Exercice 7: matrices symétriques et antisymétriques.

1. $p=2$

(a)

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$.

la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de F .

Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{donc la famille est libre.}$$

$\mathcal{F}$ est une base de F et $\underline{\dim(F) = 3}$.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) : \text{G sev de } M_2(\mathbb{R})$$

la famille $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de G et libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de G .

$\dim(G) = 1$

(b) * Soit $A \in F \cap G$.

Alors ${}^tA = A$ et ${}^tA = -A$ d'où $2A = 0$ et $A = 0$.

Donc $F \cap G = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$

* De plus $\dim F + \dim G = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$.

D'après le cours $F \oplus G = M_2(\mathbb{R})$.

2. (a) * Montrons que F est un sev de $M_p(\mathbb{R})$.

(1) $F \subset M_p(\mathbb{R})$. (2) $0_{M_p(\mathbb{R})} \in F$ car ${}^t0_{M_p(\mathbb{R})} = 0_{M_p(\mathbb{R})}$

(3) Soit $(A, B) \in F$. Alors ${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB$
et $\lambda \in \mathbb{R}$ $= \lambda A + B$

donc $\lambda A + B \in F$.

Conclusion: F sev de $M_p(\mathbb{R})$

* De même: G sev de $M_p(\mathbb{R})$.

(b). On montre comme au 1.(b) que $F \cap G = \{0\}$.

• Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$. On remarque que

$$A = B + C \quad \text{à} \quad B = \frac{A + {}^tA}{2} \quad \text{et} \quad C = \frac{A - {}^tA}{2}$$

$$B \in F \quad \text{car} \quad {}^tB = \frac{{}^tA + {}^{tt}A}{2} = \frac{{}^tA + A}{2} = B$$

REVISIONS ALGÈBRE (9)

$$\text{et } {}^tC = \frac{{}^tA - {}^{tt}A}{2} = -\frac{A - {}^tA}{2} = -C \text{ donc } C \in G.$$

D'où $E = F + G$. Ainsi $E = F \oplus G$.

Remarque: au lieu de "démontrer" une décomposition, on peut raisonner par analyse et synthèse comme dans l'Ex. 6.

Exercice 8

1. Facile.

2. Montrons que:

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad \exists! ((v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in F \times G /$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

en raisonnant par analyse et synthèse.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

Analyse: supposons qu'il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$

et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$ telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Notons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente).

Comme $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = c$.

D'ici $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + c$.

En passant à la limite : $l = 0 + c \Rightarrow l = c$.

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l$.

Ainsi : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_n = l \end{cases}$ d'ici l'unicité

de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Synthèse : soit $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_n = u_n - l \\ w_n = l \end{cases}$.

Alors : $\bullet (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l - l = 0$ donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$

$\bullet (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$.

Ainsi les deux suites existent.

Bilan : $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \exists ! ((v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in F \times G$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

donc $F \oplus G = E$.

Exercice 8 : Polynôme

1.

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X], P(-X) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
 f va bien de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

* Montrons que f est linéaire.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_{2n}[X])^2,$$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2} (\lambda P + Q - (\lambda P + Q)(-X)) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda P + Q - \lambda P(-X) - Q(-X)) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{2} P - P(-X) \right) + \frac{1}{2} (Q - Q(-X)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \text{ donc } f \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

* Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$

$$2. f(1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \quad f(X) = \frac{1}{2}(X-(-X)) = X$$

$$f(X^2) = \frac{1}{2}(X^2 - X^2) = 0 \quad f(X^3) = \frac{1}{2}(X^3 - (-X)^3) = X^3$$

etc... $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$

$$f(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ X^k & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

REVISIONS ALGEBRE (12)

• Soit $P \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = f(Q)$.

De plus $f(P) = 0$ donc $f^2(Q) = 0 \Leftrightarrow f(Q) = 0$
car $f^2 = f$. Donc $P = 0$. D'où l'inclusion

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}.$$

Conclusion:
$$\begin{cases} \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}_n[X] \\ \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \end{cases}$$

donc
$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X]$$

Exercice 10 **Exercice 9**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$\text{rg}(A) = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ | REVISIONS ALGEBRE (12)

$$X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -y + z = 2z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (vecteur non nul) et
générateur de $\text{Ker}(A)$: c'est une base de $\text{Ker}(A)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} = 1$$

D'où $\dim \text{Ker}(B) = 2$.

On remarque que $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B)$

et $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B)$

la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre car formée de
deux vecteurs non colinéaires.

Ex. 10 (suite)

Comme $\text{Card} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 2 = \dim \text{Ker}(B)$,
la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker}(B)$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(\pi) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= 3$$

Donc π est inversible et $\text{Ker}(\pi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(H) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

D'où $\dim \text{Ker}(H) = 2$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\text{Ker}(H)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.

Comme $\text{Card} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 2 = \dim \text{Ker}(H)$,
 $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker}(H)$.

Exercice 11

Exercice 10

REVISIONS ALGÈBRE (13)

1. On note $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Soit } \pi = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rg}(\pi) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

π est inversible, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Rq: d'autres méthodes sont possibles, par exemple famille libre + $\text{Card} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

$$2. P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \pi$$

3. Il s'agit d'abord d'inverser $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$Y = \pi X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = a \\ -x + z = b \\ -2x - y + 3z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = a & L_1 \\ y = a + 2b & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ z = a + c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b + c \\ y = a + 2b \\ z = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_{B, B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\text{Mat}_{B'}(f) = P_{B, B'}^{-1} \times A \times P_{B, B'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Réponse: nous avons diagonalisé A!

Exercice 12

REVISIONS ALGÈBRE (14)

Exercice 11

1. La famille $B = ((1, 2), (1, 1))$ est liée car formée de deux vecteurs non colinéaires.

$\text{Card}(B) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc B est une base de $\mathbb{R}^2$.

De même B' est une base de $\mathbb{R}^2$.

2.

$$\begin{aligned} * f((1, 2)) &= (1-2, 1+2) = (-1, 3) \\ &= 4 \cdot (1, 2) + (-5) \cdot (1, 1) \end{aligned}$$

$$f((1, 1)) = (0, 2) = 2 \cdot (1, 2) + (-2) \cdot (1, 1)$$

$$\text{D'où } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f((1, 2)) \\ f((1, 1)) \end{matrix}$$

$$* f((1, 1)) = (0, 2) = 1 \cdot (1, 2) + (-1) \cdot (1, 1)$$

$$f((1, 2)) = (2, 0) = 1 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (1, 1)$$

$$\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f((1, 1)) \\ f((1, 2)) \end{matrix}$$

$$3. P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

$$\begin{aligned} 6. (1, 1) &= 0 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (1, 1) \\ (1, -1) &= -2 \cdot (1, 2) + 3 \cdot (1, 1) \end{aligned}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1, 2) \\ (1, 1) \end{matrix}$$

$$4. \det(P) = 0 \times 3 - (-2) \times 1 = 2 \neq 0$$

donc P inversible.

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{\det(P)} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rappel: si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$.

A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Si c'est le cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

5.

$$N = P^{-1} \Pi \cdot P : \text{cf cours sur le changement de bases}$$

Vérification Silab ok

Exercice 13

Exercice 12

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3$$

$$\text{d'où } A^2 - 3A + 2I_3 = 0.$$

le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A .

$$2. \text{ On a donc } A^2 - 3A = -2I_3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = I_3 \Leftrightarrow A \cdot \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3\right) = I_3$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le th. de la division euclidienne pour les polynômes, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R \text{ avec } \deg(R) \leq 1.$$

Notons $R = aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + aX + b$$

D'où: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^n = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \quad (*)$$

On remarque que $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

• Si $x = 1$, $(*)$ donne:

$$1 = 0 \times Q(1) + a + b \Rightarrow \underline{a + b = 1}$$

• Si $x = 2$, $(*)$ donne:

$$2^n = 0 \times Q(2) + 2a + b \Rightarrow \underline{2a + b = 2^n}$$

Ainsi

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a = 2^n - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = -2^n + 2 \end{cases}$$

Donc le reste est

$$R = (2^n - 1)X + (-2^n + 2)$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \underbrace{(A^2 - 3A + 2I_3)}_{=0} \cdot Q(A) + R(A)$$

$$\Leftrightarrow A^n = (2^n - 1)A + (-2^n + 2)I_3$$

Vérification: si $n = 0$: $(2^0 - 1)A + (-2^0 + 2)I_3 = I_3 = A^0$
 si $n = 1$: $(2^1 - 1)A + (-2^1 + 2)I_3 = A = A^1$
 si $n = 2$: $3A - 2I_3 = A^2$

Exercice 14

Exercice 13

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = M + {}^tM$$

1. $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), {}^tM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

f va bien de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= (\lambda M + N) + {}^t(\lambda M + N) \\ &= \lambda M + N + \lambda {}^tM + {}^tN \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

2. Soit $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$\text{où } E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

On montre facilement que la famille

$\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est libre :

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

$$\text{Donc } \underline{\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f) = 3}.$$

3. D'après le th. du
rang,

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(f) &= \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \text{Im}(f) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors}$$

$$f(A) = A + {}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A \in \text{Ker}(f)$. la famille (A) est libre (car $A \neq 0$)
et $\text{Card}(A) = 1 = \dim \text{Ker}(f)$ donc (A) est une base
de $\text{Ker}(f)$.

$$4. \text{ Montrons que } \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous savons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$
est une base de $\text{Im}(f)$ et que $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une
base de $\text{Ker}(f)$. Ces deux ser sont supplémentaires
dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si la famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ 2\gamma = 0 \\ \beta - \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$ et on a bien

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = M_2(\mathbb{R})$$

5. $\forall \pi \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f \circ f(\pi) &= f(\pi + {}^t\pi) \\ &= f(\pi) + f({}^t\pi) \text{ par linéarité de } f \\ &= \pi + {}^t\pi + {}^t\pi + {}^t({}^t\pi) \\ &= 2(\pi + {}^t\pi) \\ &= 2f(\pi) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } f^2 = 2f \Leftrightarrow f^2 - 2f = 0.$$

le polynôme $X^2 - 2X$ est bien un polynôme annulateur de f .

6. Prouvons que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$

On procède par double inclusion.

C: Soit $N \in \text{Im}(f)$: $\exists \pi \in M_2(\mathbb{R}) / N = f(\pi)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } (f - 2\text{Id})(N) &= (f - 2\text{Id})(f(\pi)) \\ &= f^2(\pi) - 2f(\pi) \\ &= 0 \text{ d'après le 5.} \end{aligned}$$

donc $N \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

D'ici l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

D: Soit $\pi \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Alors

$$\begin{aligned} f(\pi) - 2\pi &= 0 \Leftrightarrow \pi = \frac{1}{2}f(\pi) \\ &\Leftrightarrow \pi = f\left(\frac{1}{2}\pi\right) \text{ par linéarité.} \end{aligned}$$

Donc $\pi \in \text{Im}(f)$. D'ici l'inclusion $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \subset \text{Im}(f)$.

Conclusion: $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$

7. On a donc $\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = M_2(\mathbb{R})$

Il existe une base $\mathcal{B}' = (N_1, N_2, N_3, N_4)$ de $M_2(\mathbb{R})$ telle que (N_1) soit une base de $\text{Ker}(f)$ et (N_2, N_3, N_4) soit une base de $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

$$\begin{aligned} \text{D'ici } f(N_1) &= 0 & f(N_3) &= 2N_3 \\ f(N_2) &= 2N_2 & f(N_4) &= 2N_4 \end{aligned}$$

Ex. 14 (fin)

On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix}$$

$f(N_1) \ f(N_2) \ f(N_3) \ f(N_4)$

Exercice 15

Exercice 14

$$1. \text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= 2$$

Donc $\dim \text{Im}(f) = 2$ et $\dim \text{Ker}(f) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + 3e_2 + e_3) \\ &= \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2, 3e_2) \\ &= \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2). \end{aligned}$$

$\text{Im}(f)$ a pour base $(e_1 + e_3, e_2)$.

(Famille génératrice de cardinal 2)

REVISIONS ALGEBRE (19)

* Soit $x \in E$, $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta - \gamma = -3\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow x = -3\gamma e_1 + 2\gamma e_2 + \gamma e_3$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f) = \{ -3\gamma e_1 + 2\gamma e_2 + \gamma e_3 \mid \gamma \in \mathbb{R} \}$$

$$= \text{Vect}(-3e_1 + 2e_2 + e_3)$$

la famille $(-3e_1 + 2e_2 + e_3)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

2.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 3$$

donc B est inversible et $\mathcal{B}'$ est une base de E .

$$(b) \text{Mat}_{B'}(f) = P_{B,B'}^{-1} \times \text{Mat}_B(f) \times P_{B,B'}$$

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Calculons son inverse.}$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$Y = P X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = a \\ x - 2z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = a \\ -y - 5z = b - a \\ -4z = c - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y - 3z = a + \frac{1}{4}a + b - \frac{5}{4}c - \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}c \\ y = a + b - 5z = -\frac{1}{4}a - b + \frac{5}{4}c \\ z = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c \\ y = -\frac{1}{4}a - b + \frac{5}{4}c \\ z = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1 & 5/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} Y$$

Dans

$$P_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1 & 5/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Puis

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{B'}(f) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/4 & -1 & 5/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P_{B,B'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(c) \text{ On remarque que } f(e_1') = 4e_1' - e_2' \\ f(e_2') = 4e_1' - 2e_2'$$

dans par linéarité $H = \text{Vect}(e_1', e_2')$ et stable par f .

Notons $B'' = (e_1', e_2')$ base de H .

$$\text{Mat}_{B''}(f|_H) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$1. G = \{ P \in \mathbb{R}_n[X] / P = (X-1)^2(X+1)^2 Q \text{ à } \deg(Q) \leq n-4 \}$$

$$= \left\{ (X-1)^2(X+1)^2 \sum_{k=0}^{n-4} a_k X^k / (a_0, a_1, \dots, a_{n-4}) \in \mathbb{R}^{n-3} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{n-4} a_k (X-1)^2(X+1)^2 X^k / (a_0, \dots, a_{n-4}) \in \mathbb{R}^{n-3} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left((X-1)^2(X+1)^2, (X-1)^2(X+1)^2 X, \dots, (X-1)^2(X+1)^2 X^{n-4} \right)$$

Donc G est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.

La famille $\mathcal{B}_G = ((X-1)^2(X+1)^2 X^k)_{k \in \{0, n-4\}}$

est génératrice de G et libre puisque formée de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts.

C'est une base de G et $\dim(G) = \text{Card}(\mathcal{B}_G) = n-3$

$$2. \star \dim G + \dim \mathbb{R}_3[X] = n-4+3 \\ = n+1 \\ = \dim \mathbb{R}_n[X]$$

$\star$ Soit $P \in G \cap \mathbb{R}_3[X]$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} P = (X-1)^2(X+1)^2 Q \\ \deg P \leq 3 \end{cases}$$

Seule possibilité :

$$P = 0_{\mathbb{R}[X]}!$$

$$\text{Donc } G \cap \mathbb{R}_3[X] = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}.$$

$\star$ Ainsi $G \oplus \mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_n[X]$: G et $\mathbb{R}_3[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) Soit $k \in \{0, n\}$. D'après le th. de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^k = \underbrace{(X-1)^2(X+1)^2 Q}_{\in G} + \underbrace{R}_{\in \mathbb{R}_3[X]} \text{ à } R \in \mathbb{R}_3[X].$$

$$\text{D'où } p(X^k) = R.$$

Calculons ce reste !

$$X^k = (X-1)^2(X+1)^2 Q + aX^3 + bX^2 + cX + d \quad (*)$$

$$\hookrightarrow kX^{k-1} = 2(X-1)(X+1)Q + 2(X-1)^2(X+1)Q + (X-1)^2(X+1)^2 Q \\ + 3aX^2 + 2bX + c \quad (**)$$

Évaluons (*) en 1 et en -1 :

$$\begin{cases} a+b+c+d = 1 \\ -a+b-c+d = (-1)^k \end{cases}$$

Évaluons (**) en 1 et en -1 :

$$\begin{cases} 3a+2b+c = k \\ 3a-2b+c = k(-1)^{k-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 & L_1 \\ -a+b-c+d=(-1)^k & L_2 \\ 3a+2b+c=k & L_3 \\ 3a-2b+c=k(-1)^{k-1} & \end{cases}$$

la résolution de ce système est particulièrement
petite...

On obtient en définitive:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{4}k(-1)^{k-1} = a_k \\ b = \frac{1}{4}k - \frac{1}{4}k(-1)^{k-1} = b_k \\ c = -\frac{1}{4}k - \frac{1}{4}k(-1)^{k-1} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(-1)^k = c_k \\ d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{1}{4}k + \frac{1}{4}k(-1)^{k-1} = d_k \end{cases}$$

Ainsi: $P(X_k) = a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k$

avec les valeurs de a, b, c, d trouvées
ci-dessus.

$$\text{Mat}_{3,4}(q) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ d_0 & d_1 & \dots & d_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17

Exercice 16

$$1. \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Calculer le rang de A :

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{n-1} L_1$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{array}$$

Cette dernière matrice est inversible

(car triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux non nuls), elle est donc de rang n.

D'où $\text{rg}(A) = n$ et A est inversible.

$$2. P = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = A$$

Révisions algèbre (23)

On remarque que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & n-2 \\ n-2 & n-1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2 & n-2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = (n-1)I_n + (n-2)A$$

$$\text{D'où } A^2 - (n-2)A = (n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow A(A - (n-2)I_n) = (n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow A \left(\frac{1}{n-1} A - \frac{n-2}{n-1} I_n \right) = I_n$$

$$\text{Donc } \boxed{A^{-1} = \frac{1}{n-1} A - \frac{n-2}{n-1} I_n}$$

Rq : on peut aussi calculer A^{-1} en résolvant le système $AX=Y$, mais cela est plus long...

Exercice 18

Exercice 17

1. * On définit la famille $\mathcal{B}_k$ est génératrice de E_k .

* Puisque qu'elle est libre.

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que

$$\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k = 0.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_0 e^x + \lambda_1 x e^x + \dots + \lambda_k x^k e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_k x^k = 0 \text{ car } e^x \neq 0.$$

Ceci signifie que la fonction polynômiale
 $x \mapsto \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_k x^k$ est identiquement nulle.
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Un polynôme est nul si ses coefficients sont nuls,
donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Ainsi $\mathcal{B}_k$ est libre.

* Donc $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k .

2.

* Montrons que Φ est linéaire.

$$\forall (f, g) \in (E_3)^2, \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha f + g) &= (\alpha f + g)^{''''} - 2(\alpha f + g)^{'''} + (\alpha f + g)'' \\ &= \alpha(f^{''''} - 2f^{'''} + f'') + g^{''''} - 2g^{'''} + g'' \\ &= \alpha \Phi(f) + \Phi(g)\end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire.

Révisions algèbre (24)

* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi(f_0)(x) &= f_0^{(3)}(x) - 2f_0^{(2)}(x) + f_0'(x) \\ &= e^x - 2e^x + e^x \\ &= 0\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x e^x \text{ donc } f_1'(x) = (x+1)e^x \\ f_1''(x) &= (x+2)e^x \\ f_1^{(3)}(x) &= (x+3)e^x\end{aligned}$$

$$\text{D'ici } \Phi(f_1)(x) = (x+3)e^x - 2(x+2)e^x + (x+1)e^x = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f_2(x) &= x^2 e^x \text{ donc } f_2'(x) = (2x + x^2)e^x \\ f_2''(x) &= (2 + 2x + 2x + x^2)e^x \\ &= (2 + 4x + x^2)e^x \\ f_2^{(3)}(x) &= (4 + 2x + 2 + 4x + x^2)e^x \\ &= (6 + 6x + x^2)e^x\end{aligned}$$

D'ici

$$\begin{aligned}\Phi(f_2)(x) &= (2x + x^2)e^x - 2(2 + 4x + x^2)e^x + (6 + 6x + x^2)e^x \\ &= 2e^x = 2f_0(x) \in E_3\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f_3(x) &= x^3 e^x \text{ donc } f_3'(x) = (3x^2 + x^3)e^x \\ f_3''(x) &= (6x + 6x^2 + x^3)e^x \\ f_3^{(3)}(x) &= (6 + 18x + 9x^2 + x^3)e^x\end{aligned}$$

D'au

$$\begin{aligned}\Phi(f_3)(x) &= (6 + 18x + 9x^2 + x^3)e^x \\ &\quad - 2(6x + 6x^2 + x^3)e^x \\ &\quad + (3x^2 + x^3)e^x \\ &= (6 + 6x)e^x \\ &= 6f_0(x) + 6f_1(x) \in E_3.\end{aligned}$$

* Soit $f \in E_3$: $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$
 où $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$. Alors par linéarité de Φ ,

$$\begin{aligned}\Phi(f) &= a_0 \Phi(f_0) + a_1 \Phi(f_1) + a_2 \Phi(f_2) + a_3 \Phi(f_3) \\ &\in E_3\end{aligned}$$

Ainsi Φ est un endomorphisme de E_3 .

3. D'après les calculs précédents:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$\Phi(f_0) \quad \Phi(f_1) \quad \Phi(f_2) \quad \Phi(f_3)$

Exercice 19

Exercice 18

Révisions algèbre (25)

1. * Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(x+1) - (\lambda P + Q)(x) \\ &= \lambda (P(x+1) - P(x)) + (Q(x+1) - Q(x)) \\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire.

* $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P(x+1)) = \deg(P)$

donc $\deg(\Delta(P)) = \deg(P(x+1) - P(x)) \leq n$
 et $\Delta(P) \in E$.

* Ainsi $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.

2. (a) Soit $P \in \text{Ker}(\Delta)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = 0$.

Par récurrence facile, on obtient: $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) - P(0) = 0$.

Le polynôme $Q = P - P(0)$ admet donc une infinité de racines (tous les $n \in \mathbb{N}$).

Donc ce polynôme est nul et $P = P(0)$: P est un polynôme constant.

(b) D'après le (a), $\text{Ker}(\Delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

De plus si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, $P = a \in \mathbb{R}$ et

$$\Delta(P) = a - a = 0 \text{ donc } \mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker}(\Delta).$$

Bilan: $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] = \{\text{polynômes constants}\}$

(c) $\text{Ker}(\Delta) \neq \{0\}$ donc Δ n'est pas bijectif.

3. (a)

• $\Delta(1) = 0$

• $\forall k \in \mathbb{I}1; n\mathbb{I}$,

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - X^k \quad (\text{binôme})$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

(b) Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \binom{k}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{k}{k-1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

Révisions algèbre (26)

$$\text{Im}(\Delta) = \text{Vect}(\Delta(1), \Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$$

$$= \text{Vect}(0, 1, 1+2X, \dots, 1+kX^{k-1}, \dots, 1+\dots+nX^{n-1})$$

$$= \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1}, \dots, X^{n-1})$$

$$= \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

4. $\text{Ker}(\Delta) \cap \text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}$

donc $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$ ne sont pas supplémentaires dans E .

5. (a) Classique!

(b) • $\Delta(P_0) = 0$

• Si $k \in \mathbb{I}1; n\mathbb{I}$,

$$\Delta(P_k) = P_k(X+1) - P_k(X)$$

$$= \frac{1}{k!} (X+1)X(X-1)\dots(X-k+2) - \frac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$$

$$= \frac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+2) (X+1 - (X-k+1))$$

$$= \frac{k}{k!} X(X-1)\dots(X-k+2) = \frac{1}{(k-1)!} X(X-1)\dots(X-k+2)$$

donc $\Delta(P_k) = P_{k-1}$

Ex-19 (fin)

Notons $\mathcal{B} = (p_k)_{0 \leq k \leq m}$.

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 20

Exercice 19

1. * Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x) + \delta u^3(x) = 0. \quad (1)$$

En appliquant u , par linéarité:

$$\alpha u(x) + \beta u^2(x) + \gamma u^3(x) + \underbrace{\delta u^4(x)}_{=0} = 0 \quad (2)$$

Puis en continuant:

$$\alpha u^2(x) + \beta u^3(x) + \gamma u^4(x) = 0 \quad (3)$$

et

$$\alpha u^3(x) = 0 \quad (4).$$

Comme $u^3(x) \neq 0$, $\alpha = 0$. En revenant dans (3): $\beta = 0$, dans (2): $\gamma = 0$ et dans (1): $\delta = 0$.

Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$: la famille $\mathcal{B}$ est libre.

* $\text{Card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim E$ donc $\mathcal{B}$ est une base de E .

2.

Révisions algèbre (27)

$$g(x) = x + u(x) + u^2(x) + u^3(x)$$

$$g(u(x)) = u(x) + u^2(x) + u^3(x) \text{ car } u^4(x) = 0$$

$$g(u^2(x)) = u^2(x) + u^3(x)$$

$$g(u^3(x)) = u^3(x)$$

$$\text{D'ici } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire inférieure avec des coeff. diagonaux non nuls, donc inversible.

Ainsi g est un automorphisme de E .

$$\begin{aligned} 3. \quad g \circ (\text{Id}_E - u) &= g \circ \text{Id}_E - g \circ u \\ &= \text{Id}_E + u + u^2 + u^3 - (u + u^2 + u^3 + u^4) \\ &= \text{Id}_E \text{ car } u^4 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{De même } (\text{Id}_E - u) \circ g = \text{Id}_E.$$

$$\text{Donc } g^{-1} = \text{Id}_E - u$$

Exercice 21

Exercice 20

1. Idem Ex-20 1)

2. Il suffit de prendre $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ et on reprend le raisonnement du 20. 1)

(b) Soit $y \in \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^p(x))$.

Alors

$$y = \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_p f^p(x) \text{ où } (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$$

D'où

$$f(y) = \alpha_0 f(x) + \alpha_1 f^2(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^p(x) + \alpha_p \underbrace{f^{p+1}(x)}_{=0}$$

$$\in \text{Vect}(x, \dots, f^p(x))$$

Donc l.e.v. $\text{Vect}(x, \dots, f^p(x))$ est stable par f .

(c) Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que

$$\alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_p f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

En calculant cette fonction pour le x du (a):

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_p f^p(x) = 0_E.$$

Comme la famille $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est libre,

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0.$$

Donc la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^p)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

3. On suppose que $\dim(E) = n$ et $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons $f^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. D'après le 2. : il existe $x \in E$

tel que $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est libre.

Or cette famille est de

Révisions algèbre (28)

cardinal $n+1 > \dim(E)$: absurde!

$$\text{Donc } f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Enoncé 22

Exercice 21

1. Soit $A \in \mathbb{R}$ et F un sev de $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$: Supposons F stable par f . Montrons que F est stable par $f - A \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Soit $u \in F$.

$$(f - A \text{Id}_{\mathbb{R}^n})(u) = \underbrace{f(u)}_{\in F} - A \underbrace{u}_{\in F} \in F$$

Donc F est bien stable par $f - A \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

$\Leftarrow$: si F est stable par $f - A \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, alors comme précédemment F sera stable par

$$(f - A \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) + A \text{Id}_{\mathbb{R}^n} = f \dots$$

Ainsi : $\boxed{F \text{ stable par } f \Leftrightarrow F \text{ stable par } f - A \text{Id}}$

2. Si F est stable par f alors F est stable par f^2 .

$$\text{Car } f^2(x) = f(f(x)).$$

Ex-22. (suite)

3. (a) Comme $\text{Vect}(e_p)$ stable par f : $\exists \alpha \in \mathbb{R} / f(e_p) = \alpha e_p$
 $\text{Vect}(e_q)$ ————— : $\exists \beta \in \mathbb{R} / f(e_q) = \beta e_q$
 $\text{Vect}(e_p + e_q)$ ————— : $\exists \gamma \in \mathbb{R} / f(e_p + e_q) = \gamma(e_p + e_q)$

Finalement:

$$\begin{aligned} f(e_p + e_q) &= f(e_p) + f(e_q) \Leftrightarrow \gamma(e_p + e_q) = \alpha e_p + \beta e_q \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \end{cases} \text{ car } (e_p, e_q) \text{ libre} \end{aligned}$$

Donc il existe bien λ tel que $f(e_p) = \lambda e_p$
 $f(e_q) = \lambda e_q$.

(b) Si f laisse stable toutes les droites vectorielles:

$\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\text{Vect}(e_p), \text{Vect}(e_q), \text{Vect}(e_p + e_q)$
sont stables par f .

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall p \in \{1, \dots, n\}, f(e_p) = \lambda e_p$.

On en déduit que $f = \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$: f est une homothétie

Exercice 23

Révisions algèbre (29)

Exercice 22

1.

(a) Soit $x \in \text{Ker}(f^p)$. Alors $f^p(x) = 0_E$. D'où
 $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0_E) = 0_E$ et $x \in \text{Ker}(f^{p+1})$.

D'où l'inclusion $\text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^{p+1})$

(b) Soit $y \in \text{Im}(f^{p+1})$, $\exists x \in E / y = f^{p+1}(x)$.

Alors $y = f^p(f(x)) \in \text{Im}(f^p)$.

D'où l'inclusion $\text{Im}(f^{p+1}) \subset \text{Im}(f^p)$

2. (a)

$\Rightarrow$: Supposons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Montrons que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

• L'inclusion $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ est évidente.

• Soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$: $\exists x \in E / y = f(x)$.

De plus $f(y) = 0_E \Leftrightarrow f^2(x) = 0_E$.

Comme $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, on a aussi $f(x) = 0_E$
d'où $y = 0_E$. D'où $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0_E\}$.

Par double inclusion $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

Partons qu'alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

$\subseteq$: cette inclusion est vraie d'après le 1.a) avec $p=2$.

$\supseteq$: soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. Alors

$$f^2(x) = 0_E \Leftrightarrow f(f(x)) = 0_E$$

Ainsi $f(x) \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$ d'où $f(x) = 0_E$ par l'hypothèse.

Donc $x \in \text{Ker}(f)$.

Finalement $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Conclusion: $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$

(b) Supposons E de dimension finie.

D'après le th. du rang,

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E.$$

Dans ce cas

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E.$$

D'où

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E}$$

3. Montrons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.

$\Rightarrow$: Supposons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

Montrons que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$:

• L'inclusion $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subset E$ est évidente.

• Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

$$\exists y \in E / f(x) = f^2(y).$$

$$\text{D'où } f(x - f(y)) = 0_E.$$

$$\text{Ainsi } x = \underbrace{x - f(y)}_{\in \text{Ker}(f)} + \underbrace{f(y)}_{\in \text{Im}(f)} \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$$

$\Leftarrow$: Supposons que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.

Montrons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

$\supset$: $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$: vrai d'après le 1.b. avec $p=1$.

$\subset$: Soit $y \in \text{Im}(f)$. Alors $\exists x \in E / y = f(x)$.

$$\text{Comme } E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f): \exists (z, t) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f) / x = z + t = z + f(s) \text{ où } s \in E.$$

$$\text{Alors } y = f(x) = \underbrace{f(z)}_{=0} + f^2(s) = f^2(s) \in \text{Im}(f^2).$$

Ainsi $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

Ex. 23 (fin)

D'ici $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$

Conclusion: $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$

Exercice 24

Exercice 23

1. Montrons que:

$\forall x \in E, \exists ! (y, z, t) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$
 $x = y + z + t.$

Soit $x \in E.$

Analyse: supposons l'existence de ces vecteurs y, z et t :
 $x = y + z + t.$

Alors $f(x) = z + 2t$ car $f(y) = 0, f(z) - z = 0,$
puis $f^2(x) = z + 4t$ car $f^2(t) = 0.$

D'ici:

$$\begin{cases} y + z + t = x \\ z + 2t = f(x) \\ z + 4t = f^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{3}{2}f(x) + x \\ z = -f^2(x) + 2f(x) \\ t = \frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) \end{cases}$$

D'ici l'unicité.

Révisions algèbre (31)

Synthèse: considérons y, z, t définis par les formules ci-dessus.

$$* y + z + t = x \text{ (faible)}$$

$$* f(y) = \frac{1}{2}f^3(x) - \frac{3}{2}f^2(x) + f(x) \\ = \frac{1}{2}(f^3 - 3f^2 + 2f)(x) = 0_E \text{ par hypothèse}$$

donc $y \in \text{Ker}(f)$

$$* f(z) = -f^3(x) + 2f^2(x) \\ = -3f^2(x) + 2f(x) + 2f^2(x) \\ = -f^2(x) + 2f(x) \\ = z \quad \text{donc } z \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$$

$$* f(t) = \frac{1}{2}(f^3(x) - f^2(x)) \\ = \frac{1}{2}(2f^2(x) - 2f(x)) = f^2(x) - f(x) \\ = 2t \quad \text{donc } t \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$$

D'ici l'existence.

Bilan: on a bien

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = E$$

- (2) Soit B_1 une base de $\text{Ker}(f)$
 B_2 une base de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$
 B_3 ————— $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.

D'après le (1), la famille B obtenue en concaténant B_1, B_2, B_3 est une base de E .

Dans cette base,

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$$

(3)

(a) Classique --- lire (à gauche) + cardinal 3.

(b) $1 = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$

$$\Leftrightarrow 1 = \alpha(X-1)(X-2) + \beta X(X-2) + \gamma X(X-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1 : \text{on évalue en } 0 \\ -\beta = 1 : \text{on évalue en } 1 \\ 2\gamma = 1 : \text{on évalue en } 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -1 \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où

$$1 = \frac{1}{2} P_0 - P_1 + \frac{1}{2} P_2$$

Révisions algèbre (32)

(c) * Soit $j=0$,

$$\begin{aligned} f(P_0(f)(x)) &= f((f - \text{Id}) \circ (f - 2\text{Id}))(x) \\ &= (f^3 - 3f^2 + 2f)(x) \\ &= 0 \quad \text{car } P_0(f)(x) \in \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

* De même $P_1(f)(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$

$$P_2(f)(x) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E).$$

* D'après le (b),

$$\text{Id}_E = \frac{1}{2} P_0 \circ f - P_1 \circ f + \frac{1}{2} P_2 \circ f$$

d'où $\forall x \in E$,

$$x = \frac{1}{2} P_0(f)(x) - P_1(f)(x) + \frac{1}{2} P_2(f)(x)$$

$$\text{car } x \in \sum_{j=0}^2 \text{Ker}(f - j\text{Id}_E)$$

(d) * Soit $(y, z, t) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$

$$y + z + t = 0_E. \text{ Alors: } f(y) + f(t) = 0 \Leftrightarrow z + 2t = 0$$

$$\text{mais: } f(z) + f(2t) = 0 \Leftrightarrow z + 4t = 0. \text{ D'où}$$

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ z + 2t = 0 \\ z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = t = 0. \text{ Avec le (c) on a}$$

$$\text{bien enfin: } \boxed{\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = E}$$