

Consignes

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Exercice 1

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

1. Étude de la nature de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

(b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

(c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

(d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(e) Ecrire un programme Python qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n \geq 10$.

2. Recherche d'un équivalent de S_n .

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$.

(b) En déduire que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

3. Étude asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

(a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera notée l .

On considère la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$

(a) Convergence de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

i. Prouver que pour tout entier naturel non nul n , on a

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ii. On admet qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

En déduire que la suite $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite L en fonction de γ .

iii. Montrer que la suite $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers L .

iv. Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers L .

(b) Une valeur approchée de la limite L de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

i. Vérifier que la suite $(A_{2n})_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(A_{2n+1})_{n \geq 1}$ est décroissante.

ii. En déduire que $\forall n \geq 1, A_{2n} \leq L \leq A_{2n+1}$.

iii. Ecrire alors un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de L à 10^{-5} près.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$A(\alpha) = A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ddots & 0 & \alpha_n \\ 0 & \ddots & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si l'on note $a_{i,j}$ le coefficient de $A(\alpha)$ situé à la ligne i et la colonne j ,

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha_j & \text{si } i = n + 1 - j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note

$$\mathcal{E}_n = \{A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

Ainsi, $\mathcal{E}_n$ est l'ensemble des matrices de la forme $A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ lorsque $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ décrit $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner une base de $\mathcal{E}_n$.

2. On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 2$.
 - (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $A(1, 1)$.
 - (b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $A(1, -1)$.
 - (c) Toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ sont-elles inversibles ? Justifier la réponse.
 - (d) Toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ sont-elles diagonalisables ? Justifier la réponse.
 - (e) Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Selon les valeurs de α_1 et α_2 , étudier le nombre de valeurs propres de la matrice $A(\alpha_1, \alpha_2)$. A quelles conditions sur α_1 et α_2 la matrice $A(\alpha_1, \alpha_2)$ est-elle diagonalisable ?
3. On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 3$.
 - (a) On considère la matrice $B = A(1, 1, 1)$. Cette matrice est-elle inversible ?
 - (b) Calculer B^2 et en déduire un polynôme annulateur de B .
 - (c) Déterminer le spectre de B et justifier que B est diagonalisable.
 - (d) Donner un exemple de matrice C de $\mathcal{E}_3$ qui n'est pas diagonalisable.
4. Dans cette question, n sera un entier supérieur ou égal à 2.
 - (a) Ecrire une fonction Python intitulée `Antidiag1(n)` qui renvoie la matrice $A(1, 1, \dots, 1)$ de taille $n \times n$.
 - (b) Ecrire une fonction Python intitulée `Antidiag2(n)` qui renvoie la matrice $A(1, 2, 3, \dots, n)$ de taille $n \times n$.
5. On travaille encore dans le cas général avec une valeur quelconque de l'entier $n \geq 2$.
 - (a) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le produit $A(\alpha).A(\beta)$.
 - (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ pour que le produit $A(\alpha)$ soit inversible. Dans ce cas, donner l'inverse de $A(\alpha)$.
6. Dans toute la suite, n est un entier supérieur ou égal à 2.
 Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A(\alpha)$.
 - (a) Pour tout $k \in [[1, n]]$, soit le sous-espace vectoriel F_k de $\mathbb{R}^n$ tel que $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$. Montrer que F_k est stable par f_α . Préciser la dimension de F_k .
 - (b) Construire une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f_α s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1, \alpha_n) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & A(\alpha_2, \alpha_{n-1}) & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(\alpha_{\frac{n}{2}}, \alpha_{\frac{n}{2}+1}) \end{pmatrix} \quad \text{si } n \text{ est pair, et}$$

$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1, \alpha_n) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & A(\alpha_2, \alpha_{n-1}) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A(\alpha_{\frac{n-1}{2}}, \alpha_{\frac{n+3}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

Problème

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$.
Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $] \frac{1}{2}; +\infty[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I .
2. Montrer que H est décroissante sur I .
3. (a) Calculer $H(1)$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$$

En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

- (c) Écrire un programme Python qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.
- (d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n) = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

4. (a) Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t)$.
(b) A l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$

5. (a) Justifier : $\forall u \in [0; +\infty[, e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u$.
(b) En déduire : $\forall x \in I, \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}$.
6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. (a) Montrer : $\forall u \in [0; 1], \ln(1 + u) \geq \frac{u}{2}$.
- (b) A l'aide d'un changement de variables, montrer que, pour tout x de I , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt$ converge et donner sa valeur.
- (c) En déduire : $\forall x \in I, 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.
- (d) Montrer : $\forall x \in I, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \frac{1}{2x-1}$.
- (e) En déduire la limite de H en $+\infty$.
8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}$.
- (a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b**.
- (b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- (c) En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que :

$$H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$$

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K .