

Corrigé du CB1 - Sujet 1 EDHEC / Ecricome

Exercice 1

1. (a) Notons $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

- (b) On sait que $e \simeq 2,7$. La fonction f est décroissante sur $[e; +\infty[$ et donc aussi sur $[3; +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$.

- Pour tout $x \in [k, k+1]$, $f(x) \leq f(k)$ par décroissance de f , d'où en intégrant (bornes bon sens $k < k+1$, fonctions continues) :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

- Pour tout $x \in [k-1, k]$, $f(x) \geq f(k)$, d'où

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \geq \int_{k-1}^k f(k) dx \Rightarrow \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

- On obtient ainsi : pour tout entier k supérieur ou égal à 4,

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$,

$$S_n = \sum_{k=1}^3 \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k}$$

En sommant la relation obtenue à la question précédente pour k variant de 4 à n :

$$\sum_{k=4}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=4}^n \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

D'où en appliquant la relation de Chasles de façon répétée,

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq S_n - \sum_{k=1}^3 \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Or on calcule aisément :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_4^{n+1} = \frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2} (\ln(4))^2$$

$$\int_3^n \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_3^n = \frac{1}{2} (\ln(n))^2 - \frac{1}{2} (\ln(3))^2$$

En posant $A = \frac{1}{2} (\ln(4))^2$, $B = \sum_{k=1}^3 \frac{\ln(k)}{k}$, $C = \frac{1}{2} (\ln(3))^2$, on a bien trois constantes réelles positives telles que pour tout $n \geq 4$,

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

- (d) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{2} = +\infty$, on a par entraînement $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

(e)

```
import numpy as np
S=0
n=0
while S<10:
    n=n+1
    S=S+np.log(n)/n
print(n)
```

2. Recherche d'un équivalent de S_n .

- (a) Pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+1/n))}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Puis par composition avec la fonction carré (continue en 1) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1.$$

- (b) D'après le 1.(c), pour tout $n \geq 4$,

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2 \ln^2(n)} - \frac{A}{\ln^2(n)} + \frac{B}{\ln^2(n)} \leq \frac{S_n}{\ln^2(n)} \leq \frac{1}{2} - \frac{C}{\ln^2(n)} + \frac{B}{\ln^2(n)}$$

et on obtient aisément par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln^2(n)} = \frac{1}{2}$.

Bilan : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$

3. Étude asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

(a) Soit $n \geq 3$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2} \ln^2(n+1) + \frac{1}{2} \ln^2(n)$$

Or d'après le 1.(b), on a

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_n^{n+1} = \frac{1}{2} \ln^2(n+1) - \frac{1}{2} \ln^2(n)$$

et on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(b) Par ailleurs,

$$u_n = S_n - \frac{1}{2} \ln^2(n) \geq \frac{1}{2} \ln^2(n+1) - \frac{1}{2} \ln^2(n) - A + B \geq -A + B$$

La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante et minorée par $-A + B$. Par conséquent il s'agit bien d'une suite convergente.

Bilan : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

4. Dans la suite de l'exercice, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera notée l .

On considère la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$.

(a) Limite de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2n} - A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \sum_{\substack{k \text{ pair} \\ 1 \leq k \leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ 1 \leq k \leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ 1 \leq k \leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k \text{ pair} \\ 1 \leq k \leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 2 \cdot \sum_{\substack{k \text{ pair} \\ 1 \leq k \leq 2n}} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\ln(2i)}{2i} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(i)}{i} \\ &= S_n + \ln(2) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Bilan : pour tout entier naturel non nul n , on a bien

$$A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

ii. On admet qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

$$\begin{aligned} A_{2n} &= u_{2n} + \frac{\ln^2(2n)}{2} - u_n - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2) \cdot (\ln(n) + \gamma + o(1)) \\ &= u_{2n} - u_n + \frac{(\ln(2) + \ln(n))^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2) \cdot \ln(n) - \ln(2) \cdot \gamma + o(1) \\ &= u_{2n} - u_n + \frac{\ln^2(2)}{2} + \ln(2) \cdot \ln(n) + \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2) \cdot \ln(n) - \ln(2) \cdot \gamma + o(1) \\ &= u_{2n} - u_n + \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2) \cdot \gamma + o(1) \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) converge vers la limite l , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} - u_n = 0$.

$$\text{Bilan : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2) \cdot \gamma = L}$$

iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n} = L$ et par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$, on a encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n+1} = L$

iv. Pour conclure, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n+1} = L$, on peut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = L$.

$$\text{Bilan : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2) \cdot \gamma}$$

Autrement dit, la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2) \cdot \gamma}$$

(b) Valeur approchée de la limite L

i. Pour tout $n \geq 1$,

$$A_{2n+2} - A_{2n} = -\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$

et par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[3; +\infty[$:

$-\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \geq 0$ donc $A_{2n+2} \geq A_{2n}$: la suite $(A_{2n})_{n \geq 1}$ est croissante. De façon analogue, pour tout $n \geq 1$,

$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \leq 0$$

donc la suite $(A_{2n+1})_{n \geq 1}$ est décroissante.

ii. La suite (A_{2n}) étant croissante de limite L , elle est toujours inférieure à sa limite L . De façon analogue, la suite (A_{2n+1}) étant décroissante de limite L , elle est toujours supérieure à sa limite.

$$\text{Bilan : } \boxed{\forall n \geq 1, A_{2n} \leq L \leq A_{2n+1}}$$

iii. On est sûr que A_{2n} ou A_{2n+1} est une valeur approchée de la limite L à 10^{-5} près dès que $A_{2n+1} - A_{2n} \leq 10^{-5}$, c'est à dire dès que $\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \leq 10^{-5}$. Le programme ci-dessous convient alors :

```
n=1
while np.log(2*n+1)/(2*n+1)>10**(-5):
    n=n+1
A=0
for k in range(2,2*n+1):
    A=A+(-1)**(k-1)*np.log(k)/k
print("Valeur approchée de L : ", A)
```

Exercice 2

1. On voit immédiatement que

$$\mathcal{E}_n = Vect(E_{n,1}, E_{n-1,2}, \dots, E_{1,n})$$

donc $\mathcal{E}_n$ est bien un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La famille $\mathcal{B} = (E_{n,1}, E_{n-1,2}, \dots, E_{1,n})$ est donc génératrice de $\mathcal{E}_n$, et elle est libre car il s'agit d'une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit donc d'une base de $\mathcal{E}_n$.

2. On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 2$.

(a) $A(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A(1, 1)) &\Leftrightarrow A(1, 1) - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A(1, 1) - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \end{aligned}$$

par conséquent $Sp(A(1, 1)) = \{-1, 1\}$.

(b) $A(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A(1, -1)) &\Leftrightarrow A(1, -1) - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A(1, -1) - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \text{ impossible !} \end{aligned}$$

par conséquent $Sp(A(1, 1)) = \emptyset$.

(c) La matrice nulle appartient à $\mathcal{E}_2$ et n'est pas inversible, donc toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ ne sont pas inversibles.

(d) La matrice $A(1, -1)$ ne possède aucune valeur propre donc n'est pas diagonalisable. Par conséquent les matrices de $\mathcal{E}_2$ ne sont pas toutes diagonalisables!

(e) Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

On utilise encore une fois la même méthode !

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A(\alpha_1, \alpha_2)) &\Leftrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2) - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A(\alpha_1, \alpha_2) - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

- 1er cas : si $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, dans ce cas la matrice admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$. Comme $A(\alpha_1, \alpha_2)$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.
- 2ème cas : si $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, dans ce cas la matrice ne possède aucune valeur propre et n'est donc pas diagonalisable.

- 3ème cas : si $\alpha_1 \alpha_2 = 0$, cela signifie que l'une des deux valeurs α_1 ou α_2 est nulle. On a donc

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices étant triangulaires, leurs valeurs propres sont leurs coefficients diagonaux : $Sp(A(\alpha_1, \alpha_2)) = 0$ dans ce cas. De plus : si $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$, $rg(A(\alpha_1, \alpha_2)) = 1$ donc $\dim(Ker(A(\alpha_1, \alpha_2))) = 1 \neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, la matrice $A(\alpha_1, \alpha_2)$ est nulle donc diagonalisable.

- Bilan : la matrice $A(\alpha_1, \alpha_2)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \alpha_1 \alpha_2 > 0$ ou $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

3. On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 3$.

(a) On considère la matrice $B = A(1, 1, 1)$.

$$rg(B) = rg\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3$$

donc B est inversible.

(b) $B^2 = I_3$, donc le polynôme $P = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de B .

(c) D'après le cours, $Sp(B) \subset \{\text{racines de } P\}$. Donc $Sp(B) \subset \{-1, 1\}$.

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $rg(B - I_3) = 1$, donc $\dim(Ker(B - I_3)) = 2$.

$$B + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette fois, $rg(B + I_3) = 2$, donc $\dim(Ker(B + I_3)) = 1$.

On en déduit que 1 et -1 sont bien des valeurs propres, donc $Sp(B) = \{-1, 1\}$ et comme $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim(Ker(B - \lambda I_3)) = 2 + 1 = 3$, la matrice B est diagonalisable.

(d) On peut considérer la matrice $C = A(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice

est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où $Sp(C) = \{0\}$. Supposons C diagonalisable. Alors on aurait $C = P \cdot \text{Diag}(0, 0, 0) \cdot P^{-1} = 0$: absurde ! Donc C n'est pas diagonalisable.

4. Dans cette question, n sera un entier supérieur ou égal à 2.

(a) `def Antidiag1(n):
 A=np.zeros([n,n])
 for k in range(0,n):
 A[k,n-1-k]=1
 return A`

```
(b) def Antidiag2(n):
    A=np.zeros([n,n])
    for k in range(0,n):
        A[k,n-1-k]=n-k
    return A
```

5. On travaille encore dans le cas général avec une valeur quelconque de l'entier $n \geq 2$.

- (a) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Un simple calcul nous montre que

$$A(\alpha).A(\beta) = \text{Diag}(\alpha_n.\beta_1, \alpha_{n-1}.\beta_2, \dots, \alpha_1.\beta_n)$$

- (b) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Tout d'abord, si l'un des coefficients α_i est nul, alors l'une des colonnes de $A(\alpha)$ est nulle, donc $\text{rg}(A(\alpha)) < n$ et A n'est pas inversible.

Supposons que pour tout $i \in [[1, n]]$, $\alpha_i \neq 0$. Notons alors $\beta = (\frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\alpha_{n-1}}, \dots, \frac{1}{\alpha_1})$. Alors d'après la question précédente, $A(\alpha).A(\beta) = I_n$, donc $A(\alpha)$ est inversible.

Bilan : $A(\alpha)$ est inversible ssi $\forall i \in [[1, n]]$, $\alpha_i \neq 0$. Si c'est le cas,

$$A(\alpha)^{-1} = A\left(\frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\alpha_{n-1}}, \dots, \frac{1}{\alpha_1}\right)$$

6. Dans toute la suite, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A(\alpha)$.

- (a) Soit $k \in [[1, n]]$. Comme les coordonnées de $f_\alpha(e_k)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la k -ième colonne de $A(\alpha)$, on obtient $f_\alpha(e_k) = \alpha_k.e_{n+1-k} \in F_k$. De même, on trouve que $f_\alpha(e_{n-k+1}) = \alpha_{n-k+1}.e_k \in F_k$. Par linéarité de f_α , on en déduit bien que pour tout $x \in F_k$, $f_\alpha(x) \in F_k$, donc F_k est stable par f_α . Pour tout $k \in [[1, n]]$, si $k \neq n+1-k$, alors $\dim(F_k) = 2$: la famille (e_k, e_{n+1-k}) est libre car formée d'une famille de deux vecteurs distincts issue de la base canonique. Si $k = n+1-k$, on a deux fois le même vecteur donc $\dim(F_k) = 1$. Ceci se produit si $n+1-k = k \Leftrightarrow 2k = n+1 \Leftrightarrow k = \frac{n+1}{2}$, c'est-à-dire si n est impair et si $k = \frac{n+1}{2}$.

- (b) Supposons que n est pair. Les espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_{n/2}$ sont alors tous de dimension 2 et ont pour bases respectives $(e_1, e_n), (e_2, e_{n-1}), \dots, (e_{n/2}, e_{n/2+1})$. En concaténant leurs bases, on obtient une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ (qui est une permutation de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Pour tout $k \in [[1, n/2]]$, on a $f_\alpha(e_k) = \alpha_k.e_{n+1-k}$ et $f_\alpha(e_{n+1-k}) = \alpha_{n+1-k}.e_k$. La matrice de f_α dans la base $\mathcal{B}'$ est donc la matrice diagonale par blocs proposée dans l'énoncé :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha_1, \alpha_n) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & A(\alpha_2, \alpha_{n-1}) & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(\alpha_{\frac{n}{2}}, \alpha_{\frac{n}{2}+1}) \end{pmatrix}$$

Supposons que n est impair. Alors les espaces vectoriels $F_1, \dots, F_{\frac{n-1}{2}}$ sont de dimension 2 et ont pour bases respectives $(e_1, e_n), (e_2, e_{n-1}), \dots, (e_{\frac{n-1}{2}}, e_{\frac{n+3}{2}})$.

Le dernier espace vectoriel $F_{\frac{n+1}{2}}$ est quand à lui de dimension 1 et a pour base $(e_{\frac{n+1}{2}})$. En concaténant les bases de ces sous-espaces vectoriels, on obtient encore une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ et en raisonnant comme dans le cas précédent, on obtient la matrice diagonale par blocs suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha_1, \alpha_n) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & A(\alpha_2, \alpha_{n-1}) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A(\alpha_{\frac{n-1}{2}}, \alpha_{\frac{n+3}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix}$$

Problème - EML 2017

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. On pose, pour tout $x \in I$, $f_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$. La fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale définissant $H(x)$ est donc impropre en $+\infty$ uniquement.

On a $\frac{1}{(1+t^2)^x} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2x}}$. Comme $\frac{1}{2} < x$, on a $1 < 2x$, donc d'après le critère sur les intégrales de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt$ converge. Par comparaison (fonctions positives), $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$ converge.

Par continuité sur un segment, $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$ existe donc par somme $H(x)$ converge.

Bilan : H est définie sur I .

2. Soit $\frac{1}{2} < x < y$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $(1+t^2)^x \leq (1+t^2)^y$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^y} \leq \frac{1}{(1+t^2)^x}$. On intègre de 0 à $+\infty$ avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$H(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^y} dt \leq H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt.$$

Bilan : H est décroissante sur I .

3. (a) Soit $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^1} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^A = \text{Arctan}(A) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

Bilan : $H(1) = \frac{\pi}{2}$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A > 0$. Posons

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{-n(2t)}{(1+t^2)^{n+1}} \end{cases}$$

Les fonctions u, v sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A - \int_0^A \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - 2n \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt.\end{aligned}$$

On a $\frac{A}{(1+A^2)^n} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{A^{2n-1}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ car $2n-1 > 0$.

De sorte que, par passage à la limite,

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2nH(n) - 2nH(n+1)$$

Bilan : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$

On développe et $H(n) = 2nH(n) - 2nH(n+1)$ donc $2nH(n+1) = (2n-1)H(n)$ donc

$$H(n+1) = \frac{2n-1}{2n} H(n).$$

(c)

```
import numpy as np
n=int(input("Entrer n:"))
H=np.pi/2
for k in range(2:n+1)
    H=(2*(k-1)-1)/(2*(k-1))*H
print(H)
```

(d) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n : "H(n) = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}"$

- Initialisation : si $n=1$, $\frac{(0)!\pi}{2^1(0!)^2} = \frac{\pi}{2} = H(1)$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}H(n+1) &= \frac{2n-1}{2n} H(n) \underset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{2n-1}{2n} \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n}{2n} \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \\ &= \frac{(2(n+1)-2)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{(2(n+1)-2)!\pi}{2^{2(n+1)-1}((n+1)-1)!^2}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$ est vraie.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

4. (a) La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} > 0.$$

Il est facile de voir que $\lim_{-\infty}(\varphi) = -\infty$, $\lim_{+\infty}(\varphi) = +\infty$ Donc φ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left[\lim_{-\infty}(\varphi); \lim_{+\infty}(\varphi) \right] = \mathbb{R}$

Bilan : φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Par réciprocity comme $\varphi(0) = 0$, on a $\varphi^{-1}(0) = 0$ et comme $\lim_{+\infty}(\varphi) = +\infty$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty$.

Remarque : la fonction φ est classique et s'appelle la fonction sinus hyperbolique

(b) (1) Posons $t = \varphi(u)$.

(2) La fonction φ est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Bornes :

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = +\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = +\infty \end{cases}$$

(4) $dt = \varphi'(u)du = \frac{e^u + e^{-u}}{2} du$. (5)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+t^2)^x} dt &= \frac{1}{(1+\varphi(u)^2)^x} \cdot \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \\ &= \frac{1}{(1+\varphi(u)^2)^x} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \\ &= \frac{4^x}{(4 + e^{2u} - 2 + e^{-2u})^x} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \\ &= \frac{4^x}{(e^u + e^{-u})^{2x}} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du\end{aligned}$$

Par CDV, on a donc

$$\begin{aligned}H(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{4^x}{(e^u + e^{-u})^{2x}} \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \\ &= \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du\end{aligned}$$

Bilan : $\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du$.

5. (a) Soit $u \in [0; +\infty[$, $e^u \leq e^u + e^{-u}$ car $0 < e^{-u}$.

Comme u est positif, on a $-u \leq u$ donc $e^{-u} \leq e^u$.

Bilan : $0 < e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u$

(b) La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc, pour tout $u \in [0; +\infty[$,

$$0 < \frac{1}{2} e^{-u} \leq \frac{1}{e^u + e^{-u}} \leq e^{-u}.$$

Soit $x > \frac{1}{2}$, on a $2x-1 > 0$ donc la fonction $t \mapsto t^{2x-1} = e^{(2x-1)\ln(t)}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc

$$0 < \frac{1}{2^{2x-1}} e^{-u(2x-1)} \leq \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} \leq e^{-u(2x-1)}.$$

On multiplie par $\frac{4^x}{2} \geq 0$ et on intègre selon u sur $[0, +\infty[$ avec des bornes dans l'ordre croissant. D'après le cours, comme $2x-1 > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)} du = \frac{1}{2x-1}$.
Par conséquent

$$\frac{4^x}{2^{2x}} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2} \frac{1}{2x-1}.$$

Bilan : $\forall x \in I, \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}.$

6. On a $2x-1 \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} 0$ (par valeurs positives) donc $\frac{1}{2x-1} \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} +\infty$.
Donc par minoration $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} +\infty$.

Avec $x > \frac{1}{2}$ et $2x-1 > 0$, on a aussi $1 \leq (2x-1)H(x) \leq \frac{4^x}{2} = \frac{e^{x \ln(4)}}{2} = \frac{e^{2x \ln(2)}}{2} \xrightarrow{(\frac{1}{2})^+} 1$.

Donc par théorème des gendarmes $(2x-1)H(x) \xrightarrow{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} 1$.

Bilan : $H(x) \underset{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+}{\sim} \frac{1}{2x-1}.$

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. (a) On pose $\forall u \in [0; 1], h(u) = \ln(1+u) - \frac{u}{2}$. Comme $1+u > 0$, la fonction h est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

$$\forall u \in [0, 1], h'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+u)}{2(1+u)} = \frac{1-u}{2(1+u)} \geq 0$$

Donc h est croissante sur $[0, 1]$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que pour tout $u \in [0, 1], h(u) \geq 0$ donc $\ln(1+u) \geq \frac{u}{2}$.

Bilan : $\forall u \in [0, 1], \ln(1+u) \geq \frac{u}{2}$

(b) D'après le cours, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ (intégrale de Gauss).

Par parité, $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On s'intéresse à $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$.

(1) Posons $u = \sqrt{x}.t$, soit $t = \frac{1}{\sqrt{x}}.u$.

(2) La fonction $t \mapsto \sqrt{x}.t$ est de classe C^1 , strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Bornes : $\begin{cases} t = +\infty \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = +\infty \\ u = 0 \end{cases}$

(4) $dt = \frac{1}{\sqrt{x}} du$.

(5) $e^{-\frac{xt^2}{2}} dt = e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} du$

Par changement de variables,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{xt^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Bilan : $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$

(c) Soit $x \in I, t \in [0, 1], 0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^x} = e^{-x \ln(1+t^2)} \leq e^{-xt^2/2}$ avec la question 7.a.
avec $t^2 \in [0, 1]$. On intègre de 0 à 1 avec $0 < 1$ selon t ces fonctions continues,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leq \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt}_{0 \leq} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

(d) Soit $x \in I, t \geq 1$, on a $0 < t^2 < 1+t^2$ donc $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, on compose par la fonction $u \mapsto u^x$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ puis on intègre selon t sur $[1, +\infty[$ avec des bornes dans l'ordre croissant. On peut le faire car on a reconnu une intégrale de Riemann convergente avec $2x > 1$. Ainsi

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt = \frac{1}{2x-1}.$$

Bilan : $\forall x \in I, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \frac{1}{2x-1}.$

(e) Il est clair que $\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{2x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc par encadrement $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

0 et $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Puis par somme de limites et relation de Chasles pour les intégrales convergentes,

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}$.

$$(a) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \ln(H(n+1)) + \frac{\ln(n+1)}{2} - \ln(H(n)) - \frac{\ln(n)}{2} = \ln\left(\frac{H(n+1)}{H(n)}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$= \underbrace{\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right)} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Avec la question 3.b.

On utilise $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on peut le faire car $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit que $\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}}$.

(b) La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge avec $\alpha = 2 > 1$. Donc par comparaison des séries à terme général négatif, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Bilan : $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}}$

(c) Une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_1 \text{ par télescopage.}$$

Notons s la somme de $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$, on a alors $u_{N+1} - u_1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} s$ donc la suite (u_n) converge. On note a sa limite, donc la suite (e^{u_n}) converge, on note $K = e^a$ sa limite, elle est strictement positive. Or $e^{u_n} = H_n \sqrt{n}$ en composant par exponentielle. Donc $H_n \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K$ car K non nul.

Bilan : $\boxed{H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}}$.

9. On a $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$. Pour tout $x > 1$, on a $1 \leq [x] \leq x \leq [x] + 1$ et H est décroissante donc $H([x] + 1) \leq H(x) \leq H([x])$

On multiplie par $\frac{\sqrt{[x]}}{K} > 0$ et

$$\frac{\sqrt{[x]}}{K} H([x] + 1) \leq \frac{\sqrt{[x]}}{K} H(x) \leq \frac{\sqrt{[x]}}{K} H([x])$$

Donc

$$\frac{\sqrt{[x]}}{\sqrt{[x] + 1}} \frac{\sqrt{[x] + 1}}{K} H([x] + 1) \leq \frac{\sqrt{[x]}}{K} H(x) \leq \frac{\sqrt{[x]}}{K} H([x])$$

Comme $H([x]) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{[x]}}$, on a $\frac{\sqrt{[x]}}{K} H([x]) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

Ainsi par encadrement $H(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{[x]}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}$ car $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} [x]$.

En effet $x - 1 < [x] \leq x$ donc $1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x} = 1$.

Bilan : $\boxed{H(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}}$