

Problème 1 : les matrices pseudo-inversibles

Partie I : Définition, premières propriétés

1. Deux exemples :

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice A est triangulaire supérieure, avec un 0 sur la diagonale, donc A n'est pas inversible.

Notons $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

$$ABA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$BAB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = B$$

Bilan : A est pseudo-inversible et a pour pseudo-inverse la matrice B

(b) Le programme montre que la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est pseudo-inversible, de

pseudo-inverse $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Unicité du pseudo-inverse

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible ainsi que B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A .

(a) D'une part,

$$AB_1AB_2 = (AB_1A)B_2 = AB_2$$

et d'autre part

$$AB_1AB_2 = B_1AB_2A = B_1A = AB_1$$

en utilisant le fait que A et B_1 commutent, et que A et B_2 commutent.

Ainsi $AB_2 = AB_1$.

(b) On a alors aussi $B_2A = B_1A$ et

$$B_2 = B_2AB_2 = B_2AB_1 = B_1AB_1 = B_1$$

Bilan : $B_1 = B_2$

Ainsi la matrice A admet un unique pseudo-inverse appelé la matrice pseudo-inverse de A et notée A^* .

3. Quelques exemples

(a) Soit $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la matrice nulle d'ordre n . Alors en notant encore $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, les matrices intervenant dans les relations (1) étant toutes nulles, on voit bien que A est pseudo-inversible d'inverse B .

Bilan : $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est pseudo-inversible, et a pour pseudo-inverse $A^* = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

(b) Soit P une matrice inversible d'ordre n . Alors il est évident que

$$PP^{-1} = I = P^{-1}P, \quad PP^{-1}P = P, \quad P^{-1}PP^{-1} = P^{-1}$$

donc P est pseudo inversible de pseudo inverse P^{-1}

Bilan : si M est inversible alors M est pseudo-inversible et $M^* = M^{-1}$

4. Cas d'une matrice nilpotente

Soit N une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que N^p soit la matrice nulle et que N^{p-1} soit non nulle.

(a) On suppose que N est pseudo-inversible. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$N^*N^k = N.N^*.N.N^{k-2} = N.N^{k-2} = N^{k-1}$$

où on a utilisé le fait que N et N^* commutent.

Comme $N^p = 0$, on a alors $N^*.N^p = 0$ donc $N^{p-1} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse portant sur N .

Bilan : une matrice nilpotente n'est jamais pseudo-inversible

(b) On vérifie aisément que la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est non nulle et nilpotente, puisque $N^2 = 0$. La matrice N n'est donc pas pseudo-inversible.

5. Cas d'une matrice diagonalisable

(a) Soit D une matrice diagonale, $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On définit alors une matrice $E = \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ où pour tout $i \in [[1, n]]$, on a $\beta_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} & \text{si } \alpha_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_i = 0 \end{cases}$.

Alors $DE = ED = \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$, où $\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_i = 0 \end{cases}$. De plus, on a alors

$$DED = \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n). \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = D$$

et

$$EDE = \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n). \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) = \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = E$$

Bilan : D est inversible de pseudo-inverse $D^* = E$

- (b) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible et P une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Notons $A' = P^{-1}.A.P$. Soit $(A')^* = P^{-1}.A^*.P$. Alors on a bien :

$$A'.(A')^* = P^{-1}.A.P.P^{-1}.A^*.P = P^{-1}.A.A^*.P = P^{-1}.A^*.A.P = (A')^*.A'$$

$$A'.(A')^*.A' = P^{-1}.A.A^*.A.P = P^{-1}.A.P = A'$$

$$(A')^*.A'.(A')^* = P^{-1}.A^*.A.A^*.P = P^{-1}.A^*.P = (A')^*$$

et utilisant à chaque fois $P.P^{-1} = I$.

Bilan : la matrice $A' = P^{-1}AP$ est pseudo-inversible et $(A')^* = P^{-1}.A^*.P$

- (c) Soit A une matrice diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Comme D est diagonale, elle est pseudo-inversible d'après le 5.a). Puis d'après le 5. b), la matrice $PDP^{-1} = A$ est pseudo-inversible.

Bilan : toute matrice diagonalisable est pseudo-inversible

- (d) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- i. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Une matrice est inversible ssi ses réduites de Gauss le sont.

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2+5\lambda-4 \end{pmatrix} \quad L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \rightarrow L_3 - (2-\lambda)L_1 \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 \end{pmatrix} \quad L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \end{aligned}$$

Cette dernière matrice étant triangulaire, elle n'est pas inversible ssi $\lambda = 0$ ou $-\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 4$.

Bilan : $Sp(A) = \{0, 2, 4\}$

- Calculons $Ker(A)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in Ker(A) &\Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

- Calculons $Ker(A - 2I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in Ker(A - 2I) &\Leftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(A - 2I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- Calculons $Ker(A - 4I)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in Ker(A - 4I) &\Leftrightarrow (A - 4I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -x - 3y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(A - 4I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- ii. Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et possède trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Notons

$$D = Diag(0, 2, 4) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on a $A = P.D.P^{-1}$.

- iii. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} PX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ x + y = b \\ y + z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y - z = -a + b \\ y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y - z = -a + b \\ 2z = a - b + c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ y = z - a + b = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{cases} \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

iv. On a alors $D^* = \text{Diag}(0, 1/2, 1/4)$ et enfin

$$A^* = P.D^*.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 1/8 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/8 & 1/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

tous calculs faits

Partie II : Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles.

1. (a) Comme les endomorphismes f et f^* commutent, la relation $f \circ f^* \circ f = f$ s'écrit aussi:

$$\begin{cases} f^* \circ f \circ f = f \\ f \circ f \circ f^* = f \end{cases}$$

- (b) Comme $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E , il est évident que $\{0\} \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors

$$y = f(x) = f^* \circ f \circ f(x) = f^*(f(y)) = f^*(0_E) = 0$$

puisque $y \in \text{Ker}(f)$. Donc $y = 0$ et on a $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0\}$.

Bilan : par double inclusion, $\boxed{\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}}$

- (c) On a $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ donc $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$: $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E .

2. Dans cette question, on suppose que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

On définit l'application

$$\begin{aligned} f_0 : \text{Im}(f) &\rightarrow \text{Im}(f) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

et on admet qu'elle est linéaire.

- (a) Soit $x \in \text{Im}(f)$. Alors

$$x \in \text{Ker}(f_0) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \Leftrightarrow x = 0$$

puisque $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, les deux s.e.v. $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ étant en somme directe. Par conséquent, f_0 est un endomorphisme injectif de l'e.v. $\text{Im}(f)$ qui est de dimension finie, il s'agit donc d'un automorphisme de $\text{Im}(f)$.

- (b) D'après le cours, puisque $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

On pose alors $g(x) = (f_0)^{-1}(x_2)$.

- (c) L'application g va clairement de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrons que g est linéaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On décompose x et y sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \text{ et } y = y_1 + y_2$$

où $(x_1, y_1) \in \text{Ker}(f)^2$ et $(x_2, y_2) \in \text{Im}(f)^2$. On a alors

$$\alpha x + y = \alpha x_1 + y_1 + \alpha x_2 + y_2$$

où $\alpha x_1 + y_1 \in \text{Ker}(f)$ et $\alpha x_2 + y_2 \in \text{Im}(f)$. Par définition de g , on a alors

$$\begin{aligned} g(\alpha x + y) &= (f_0)^{-1}(\alpha x_2 + y_2) \\ &= \alpha (f_0)^{-1}(x_2) + (f_0)^{-1}(y_2) \text{ par linéarité de } f_0^{-1} \\ &= \alpha g(x) + g(y) \text{ par définition de } g \end{aligned}$$

Ainsi g est linéaire.

Bilan : $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$

- (d) Montrons que :

$$\begin{cases} f \circ g = g \circ f & (1) \\ f \circ g \circ f = f & (2) \\ g \circ f \circ g = g & (3) \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, avec $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \text{Ker}(f)$ et $x_2 \in \text{Im}(f)$. Alors

$$f \circ g(x) = f \circ (f_0)^{-1}(x_2) = x_2$$

En effet, comme $f_0^{-1}(x_2) \in \text{Im}(f)$, on a $f \circ (f_0)^{-1}(x_2) = f_0 \circ (f_0)^{-1}(x_2) = x_2$. De plus, $g \circ f(x) = g(f(x_1) + f(x_2)) = g \circ f(x_2) = (f_0)^{-1}(f(x_2)) = (f_0)^{-1} \circ f_0(x_2) = x_2$ puisque $x_2 \in \text{Im}(f)$.

Ainsi $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on en déduit donc (1).

Ensuite,

$$f \circ g \circ f(x) = f(x_2) = f(x_1 + x_2) = f(x) \text{ puisque } f(x_1) = 0$$

d'où (2) et enfin

$$g \circ f \circ g(x) = g(x_2) = (f_0)^{-1}(x_2) = g(x) \text{ par définition de } g$$

d'où (3).

- (e) En notant B la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme g défini précédemment, on a alors

$$AB = BA, ABA = A, BAB = B$$

Bilan : $\boxed{A \text{ est pseudo-inversible}}$

3. Une autre formulation :

- (a) Montrons que pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

- Supposons que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$ et montrons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
Tout d'abord, pour tout $y \in \text{Im}(f^2)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$ donc $y \in \text{Im}(f)$. On a donc déjà l'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$, il existe donc $x_1 \in \text{Ker}(f)$ et $x_2 \in \text{Im}(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_2 = f(z)$ et on a alors

$$y = f(x) = f(x_1 + f(z)) = f(x_1) + f^2(z) = f^2(z)$$

donc $y \in \text{Im}(f^2)$. D'où l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

Finalement on obtient bien que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

Ainsi $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

- Supposons que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ et montrons que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.
Tout d'abord d'après le th. du rang, on sait que $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$. Il reste donc à montrer que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.
Notons que l'inclusion $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^n$ est évidente.
Il reste à montrer que $\mathbb{R}^n \subset \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Alors $f(y) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y) = f^2(x)$. Alors

$$y = y - f(x) + f(x)$$

où $f(x) \in \text{Im}(f)$ et $y - f(x) \in \text{Ker}(f)$ puisque $f(y - f(x)) = f(y) - f^2(x) = 0$. Donc $y \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. Ainsi on a bien $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

- Bilan : $\boxed{\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)}$

- (b) On remarque que si $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ alors $rg(f) = rg(f^2)$. L'implication réciproque est également vraie : si $rg(f) = rg(f^2)$, comme $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$, on a alors $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

Pour une matrice A et f son application linéaire canoniquement associée, on a alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est pseudo-inversible} &\Leftrightarrow \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow rg(f) = rg(f^2) \\ &\Leftrightarrow rg(A) = rg(A^2) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{A \text{ est pseudo-inversible ssi } rg(A) = rg(A^2)}$

- (c) Le programme indique que $rg(A) = rg(A^2)$ donc la matrice A est pseudo-inversible d'après ce qui précède.

Problème 2 : un calcul de l'intégrale de Dirichlet

Problème : un calcul de l'intégrale de Dirichlet (EML 2004)

Partie I : Etude de la fonction $x \mapsto x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt$

1. (a) Soit $x \in]0; +\infty[$. Posons

$$\begin{cases} f(u) = \frac{1}{u} \\ g'(u) = \sin(u) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(u) = -\frac{1}{u^2} \\ g(u) = -\cos(u) \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$. Par IPP,

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{\cos(u)}{u} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(u)}{u^2} du \\ &= -\frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(u)}{u^2} du \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du$ est impropre en $+\infty$. Pour tout $u \geq 1$, $|\frac{\cos(u)}{u^2}| \leq \frac{1}{u^2}$.

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ est convergente (Riemann impropre en $+\infty$, $\alpha = 2 > 1$), par majoration (fonctions positives), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du$ est absolument convergente, donc convergente.

De plus, pour tout $x > 0$, $|\frac{\cos(x)}{x}| \leq \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\cos(x)}{x} = 0$ par encadrement. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du = \alpha \in \mathbb{R}$$

On admet que de manière analogue, G admet une limite finie en $+\infty$.

On note β cette limite.

- (b) Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \int_1^x \frac{\sin(u)}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - F(x)$$

donc $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est convergente comme différence d'intégrales convergentes

et $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \alpha - F(x)$.

De même $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ converge, et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du = \beta - G(x)$.

2. (a) Soit $x \in]0; +\infty[$ et tout réel $T \in]0; +\infty[$. On considère l'intégrale $\int_0^T \frac{\sin(t)}{t+x} dt$.
- (1) Posons $u = t + x$.
 - (2) La fonction $t \mapsto t + x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$, strictement croissante sur cet intervalle et bijective de $[0, T]$ sur $[x, x + T]$.
 - (3) Bornes : $\begin{cases} t = 0 \\ t = T \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = x + T \end{cases}$
 - (4) $du = dt$

$$(5) \frac{\sin(t)}{t+x} dt = \frac{\sin(u-x)}{u} du.$$

Par CDV,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\sin(t)}{t+x} dt &= \int_x^{x+T} \frac{\sin(u-x)}{u} du \\ &= \int_x^{x+T} \frac{\sin(u) \cos(x) - \sin(x) \cos(u)}{u} du \quad (\text{formule donnant } \sin(a-b)) \\ &= \cos(x) \int_x^{x+T} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{x+T} \frac{\cos(u)}{u} du \end{aligned}$$

(b) On en déduit que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{\sin(t)}{t+x} dt = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

Ces deux dernières intégrales étant convergentes, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt$ converge.

$$\text{Bilan : } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du}$$

3. D'après les questions précédentes, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du \\ &= \cos(x) \cdot (\alpha - F(x)) - \sin(x) \cdot (\beta - G(x)) \end{aligned}$$

Comme la fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, la fonction F qui est une primitive de cette fonction est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$. De façon analogue, G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$. Finalement par produit et différence, l'application A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} A'(x) &= -\sin(x) \cdot (\alpha - F(x)) - \cos(x) \cdot F'(x) - \cos(x) \cdot (\beta - G(x)) + \sin(x) \cdot G'(x) \\ &= -\sin(x) \cdot (\alpha - F(x)) - \cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \cdot (\beta - G(x)) + \sin(x) \cdot \frac{\cos(x)}{x} \\ &= -\sin(x) \cdot (\alpha - F(x)) - \cos(x) \cdot (\beta - G(x)) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} A''(x) &= -\cos(x) \cdot (\alpha - F(x)) + \sin(x) \cdot F'(x) + \sin(x) \cdot (\beta - G(x)) + \cos(x) \cdot G'(x) \\ &= -A(x) + \sin(x) \cdot \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x) \cdot \frac{\cos(x)}{x} \\ &= -A(x) + \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{x} \\ &= -A(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{Bilan : } \boxed{A \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[) \text{ et } \forall x > 0, A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}}$$

4. Par définition de α et β , $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \alpha$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \beta$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha - F(x)) = 0$, et comme $\cos(x)$ est borné $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \cdot (\alpha - F(x)) = 0$. De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \cdot (\beta - G(x)) = 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0$.

Pour les mêmes raisons, $\lim_{x \rightarrow +\infty} A'(x) = 0$.

$$\text{Bilan : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A'(x) = 0}$$

5. (a) Pour tout $u \in]0, 1]$, comme $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos(u) \leq 1$, d'où $0 \leq \frac{\cos(u)}{u} \leq \frac{1}{u}$. Soit $x \in]0, 1]$. En intégrant (bornes bon sens), on a alors

$$0 \leq \int_x^1 \frac{\cos(u)}{u} du \leq \int_x^1 \frac{1}{u} du \Leftrightarrow 0 \leq \int_x^1 \frac{\cos(u)}{u} du \leq -\ln(x)$$

(b) Si $x \in]0, 1]$, on a alors $\sin(x) \geq 0$ et

$$0 \leq \sin(x) \cdot \int_x^1 \frac{\cos(u)}{u} du \leq -\sin(x) \cdot \ln(x)$$

Comme $-\sin(x) \ln(x) \sim_{x \rightarrow 0} -x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par CC, on en déduit par encadrement que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \cdot \int_x^1 \frac{\cos(u)}{u} du = 0$. Par ailleurs, par la relation de Chasles,

$$\sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du = \sin(x) \int_x^1 \frac{\cos(u)}{u} du + \sin(x) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du = 0$ puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ et que l'autre terme est constant.

$$\text{Bilan : } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du = 0}$$

(c) La fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}$ est continue sur $]0; +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est donc impropre en 0 et en $+\infty$. Nous avons déjà montré à la question 1.(a) que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est convergente.

Par ailleurs, par limite classique $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u} du$ est faussement impropre en 0 donc convergente.

Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est convergente.

Par ailleurs,

$$A(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$, et d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du = 0$.

$$\text{Bilan : } \boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \text{ est convergente et } \lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du}$$

Partie II : Etude de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

1. Soit $x \in]0; +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est impropre en $+\infty$.

$$t^2 \cdot \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \sim_{t \rightarrow +\infty} t^k \cdot e^{-xt} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ par CC.}$$

donc $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann impropre en $+\infty$, $\alpha = 2 > 1$), par critère de négligeabilité (fonctions positives) l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge. Comme $\int_0^1 \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est bien définie, on obtient le résultat souhaité.

Bilan : $\forall x \in]0; +\infty[, \forall k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge

2. (a) La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $u \in \mathbb{R}$.
On considère l'intervalle $I = [-|u|, |u|]$. Alors pour tout $t \in I$,

$$|exp''(t)| = e^t \leq e^{|u|}$$

Comme $u \in I$ et $0 \in I$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exp à l'ordre 2,

$$|\exp(u) - \exp(0) - \exp'(0).u| \leq \frac{1}{2}.e^{|u|}$$

et ainsi

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$$

- (b) Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt-ht}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} h \cdot \frac{t^{k+1} e^{-xt}}{1+t^2} dt \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt-ht}}{1+t^2} dt - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt + h \frac{t^{k+1} e^{-xt}}{1+t^2} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^k e^{-xt}(e^{-ht} - 1 + ht)}{1+t^2} \right| dt \text{ par inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, appliquée avec $u = -ht$:

$$|e^{-ht} - 1 + ht| \leq \frac{(ht)^2}{2} \cdot e^{|ht|}$$

D'où

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{h^2}{2|h|} \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{k+2} e^{(-x+|h|).t}}{1+t^2} \right| dt$$

Par hypothèse, $|h| \leq \frac{x}{2}$, donc $-x + |h| \leq -\frac{x}{2}$, et en définitive on obtient :

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{k+2} e^{-\frac{x}{2}.t}}{1+t^2} \right| dt$$

Bilan : $\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$

- (c) Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, par encadrement on obtient que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} = -B_{k+1}(x)$$

Bilan : pour tout entier naturel k , B_k est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad B'_k(x) = -B_{k+1}(x)$$

- (d) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{H}(n)$: " B_0 est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0; +\infty[$ et $B_0^{(n)} = (-1)^n . B_n$."

- Initialisation : si $n = 0$, B_0 est dérivable donc continue sur $]0; +\infty[$ et la relation est évidente.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. D'après ce qui précède, B_n est dérivable, donc $B_0^{(n)} = (-1)^n . B_n$ l'est aussi. Ainsi $B_0 \in \mathcal{C}^{n+1}(]0; +\infty[)$ et $B_0^{(n+1)} = (-1)^n . B'_n = (-1)^{n+1} . B_{n+1}$ donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : B_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_0^{(n)} = (-1)^n . B_n$.

On a de plus : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} B_0''(x) + B_0(x) &= B_2(x) + B_0(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \\ &= \frac{1}{x} \text{ intégrale de cours} \end{aligned}$$

Bilan : $\forall x > 0, B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$

3. Tout d'abord, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \forall x > 0, \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ donc en intégrant $B_k(x) \geq 0$.
Donc $B_0(x) \geq 0$. Comme $B'_0(x) = -B_1(x)$, on a aussi $B'_0(x) \leq 0$ donc $-B'_0(x) \geq 0$.
Ensuite, comme $B_0''(x) = B_2(x) \geq 0$, et $B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$, on a nécessairement $B_0(x) \leq \frac{1}{x}$.
En dérivant la relation $B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$B_0^{(3)}(x) + B'_0(x) = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -B_3(x) + B'_0(x) = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow B'_0(x) = -\frac{1}{x^2} + B_3(x) \geq -\frac{1}{x^2}$$

car $B_3(x) \geq 0$.

Bilan : $\forall x \in]0; +\infty[: 0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leq -B'_0(x) \leq \frac{1}{x^2}$

De façon évidente, par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} B_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} B'_0(x) = 0$

4. (a) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-xt} \leq 1$, donc $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. En intégrant, les intégrales étant convergentes (cf plus loin), on obtient

$$B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

D'autre part, par la relation de Chasles,

$$B_0(x) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Comme $\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \geq 0$, on a alors

$$B_0(x) \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Pour tout $t \in [0, \frac{1}{\sqrt{x}}]$, $e^{-xt} \geq e^{-\sqrt{x}}$. D'où

$$B_0(x) \geq e^{\sqrt{x}} \cdot \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\text{Bilan : } \forall x \in]0; +\infty[, \quad e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

- (b) Soit $A > 0$. Alors

$$\int_0^A \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(A) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(A) \rightarrow_{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$. Par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$

Partie III : Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$

1. Comme les fonctions A et B sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, il en est de même pour la fonction φ et donc pour la fonction U . Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} U'(x) &= 2.\varphi(x).\varphi'(x) - 2.\varphi'(x).\varphi''(x) = 2.\varphi'(x).(\varphi(x) - \varphi''(x)) \\ &= 2.\varphi'(x).(A(x) - B_0(x) - \frac{1}{x} - A(x) - \frac{1}{x} - B_0(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc U est constante sur $]0; +\infty[$

2. D'après les résultats précédents,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} B_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} B'_0(x) = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0$.

3. On en déduit que U est constante de valeur 0. Donc pour tout $x > 0$, $U(x) = 0$ d'où $(\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2 = 0$. Comme une somme de carrés est nulle ssi tous les termes sont nuls, on trouve que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = 0$ donc $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \quad A(x) = B_0(x)}$

4. D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$$

et d'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$. Les deux fonctions étant égales, on en déduit le résultat final.

$$\text{Bilan : } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}}$$

Assez calculatoire et un peu répétitif... Mais beaucoup de techniques entrent en jeu et tout concourt au résultat final, ce qui est satisfaisant !

On calcule l'intégrale de Dirichlet via une sorte de "transformée de Laplace".