CB1 - Sujet 2 type EML - 7/11/2025

Consignes

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Problème 1 : les matrices pseudo-inversibles

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.
Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est dite pseudo-inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} AB = BA & (1) \\ ABA = A & (2) \\ BAB = B & (3) \end{cases}$$

On dit alors que B est une pseudo-inverse de A.

Partie I : Définition, premières propriétés

1. Deux exemples :

   (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ?

   En considérant la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, montrer que A est pseudo-inversible.

   (b) Le programme Python suivant :

```
import numpy as np
C=np.array([[0,0,0],[0,1,0],[0,0,2]])
D=np.array([[0,0,0],[0,1,0],[0,0,1/2]])
print(np.dot(C,D)-np.dot(D,C))
print(np.dot(np.dot(C,D),C)-C)
print(np.dot(np.dot(D,C),D)-D)
```

   renvoie trois fois la matrice

```
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
```

   Que peut-on alors affirmer ?

2. Unicité de la pseudo-inverse
Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible ainsi que B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

   (a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_2 = AB_1$.

   (b) En déduire que $B_1 = B_2$.

   Ainsi la matrice A admet une unique pseudo-inverse appelée la matrice pseudo-inverse de A et notée A^*.

3. Quelques exemples

   (a) Montrer que la matrice nulle d'ordre n est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

   (b) Montrer que toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est inversible est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

4. Cas d'une matrice nilpotente
Soit N une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que N^p soit la matrice nulle et que N^{p-1} soit non nulle.

   (a) On suppose que N est pseudo-inversible.
   Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a $N^*N^k = N^{k-1}$.
   Aboutir à une contradiction. Que peut-on en déduire ?

   (b) Que peut-on en déduire concernant la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

5. Cas d'une matrice diagonalisable

   (a) Montrer que toute matrice diagonale d'ordre n à coefficients réels est pseudo-inversible et préciser sa pseudo-inverse.

   (b) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible et P une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
   Montrer que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse en fonction de P et de A^*.

   (c) En déduire que toute matrice diagonalisable est pseudo-inversible.

6. Un exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres de A.

   (b) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A : déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = P.D.P^{-1}$.

   (c) Calculer P^{-1}.

   (d) Montrer que la matrice A est pseudo-inversible et déterminer la pseudo-inverse de A.

Partie II : Une caractérisation des matrices pseudo-inversibles

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique $\mathcal{B}$ et on introduit l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Le but de cette partie est de montrer que :

$$A \text{ est pseudo-inversible } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$$

1. Le sens direct :
   Dans cette question, on suppose que A est pseudo-inversible et on introduit l'endomorphisme f^* tel que $A^* = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$. On a alors :

$$\begin{cases} f \circ f^* = f^* \circ f & (1) \\ f \circ f^* \circ f = f & (2) \\ f^* \circ f \circ f^* = f^* & (3) \end{cases}$$

   (a) Prouver que
$$\begin{cases} f^* \circ f \circ f = f \\ f \circ f \circ f^* = f \end{cases}$$

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

   (c) En déduire que $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n$.

2. La réciproque :
   Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

   On définit l'application

$$\begin{array}{rcl} f_0 : \mathrm{Im}(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

   et on admet qu'elle est linéaire.

   (a) Montrer que f_0 est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

   (b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

   On pose alors $g(x) = (f_0)^{-1}(x_2)$.

   (c) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Montrer que :
$$\begin{cases} f \circ g = g \circ f & (1) \\ f \circ g \circ f = f & (2) \\ g \circ f \circ g = g & (3) \end{cases}$$

   (e) En déduire que A est pseudo-inversible.

3. Une autre formulation :

   (a) Montrer que pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a :
   $$Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad Im(f) = Im(f^2)$$

   (b) Donner alors une condition nécessaire et suffisante portant sur le rang de A pour qu'une matrice A soit pseudo-inversible.

   (c) Une application : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Le programme Python suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A=np.array([[2,-2,2],[-1,1,1],[1,-1,3]])
print(al.matrix_rank(A))
print(al.matrix_rank(np.dot(A,A)))
```

   renvoie

```
2
2
```

   La matrice A est-elle pseudo-inversible ? Justifiez votre réponse.

Problème 2 : un calcul de l'intégrale de Dirichlet

Partie I : Etude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt$

On note $F :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par :
$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin(u)}{u} du \text{ et } G(x) = \int_1^x \frac{\cos(u)}{u} du$$

1. (a) Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:
   $$F(x) = -\frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{cos(u)}{u^2} du$$
   En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

   On admet que de manière analogue, G admet une limite finie en $+\infty$.
   On note β cette limite.

   (b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge et
   $$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \alpha - F(x).$$
   On admet que de manière analogue, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ converge
   et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du = \beta - G(x)$.

2. (a) Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout réel $T \in]0;+\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin(t)}{t+x}dt = \cos(x)\int_x^{x+T}\frac{\sin(u)}{u}du - \sin(x)\int_x^{x+T}\frac{\cos(u)}{u}du$$

(b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t+x}dt$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}dt = \cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du - \sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du$$

On note $A\ :]0;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t+x}dt$$

3. Montrer que l'application A est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. (a) Montrer : $\quad \forall x \in]0;1], \quad 0 \leq \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}du \leq -\ln x$

(b) En déduire que $\sin(x)\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}du$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

(c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Partie II : Etude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^k\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel k, $B_k\ :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad B_k(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^k\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}dt$$

2. (a) Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2}e^{|u|}$$

(b) En déduire, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$:

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad B_k'(x) = -B_{k+1}(x)$$

(d) En déduire que B_0 est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$$

3. Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leq -B_0'(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. (a) Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ et en déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Partie III : Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x) \ ,$$

où A a été définie dans la Partie **I** et B_0 a été définie dans la Partie **II**.

On note $U :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$U(x) = \big(\varphi(x)\big)^2 + \big(\varphi'(x)\big)^2$$

1. Montrer que U est constante sur $]0;+\infty[$.
2. Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
3. En déduire : $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad A(x) = B_0(x)$.
4. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$?