
CB1 - Sujet facultatif type maths 1 HEC/ESSEC - 05/11/2025

Notations et objectifs:

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ , des expressions des fonctions $\sin$, $\frac{1}{\sin}$ et $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (on parle de développements eulériens).

Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par:

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

On en déduit une expression de la fonction $\frac{\cos}{\sin}$, puis, dans la partie III, de la fonction sinus.

Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\frac{1}{\sin}$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1. Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.

Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction φ est donc définie sur D .

2. Imparité et périodicité de φ :

(a) Justifier que φ est impaire.

(b) Vérifier que pour x dans D : $\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}$.

(c) Montrer que pour x dans D : $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$.

La fonction φ est donc périodique de période 1 .

3. Continuité de φ :

(a) Justifier pour x dans l'ensemble $D \cup \{0, 1\}$ l'existence de :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x} \right)$$

(b) Vérifier que : $\forall x \in D, \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} - g(x)$.

(c) Soit h un nombre réel de $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, montrer que : $\forall x \in [0, 1], |g(x + h) - g(x)| \leq C|h|$ où

$$C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n - 1) \left(n - \frac{3}{2} \right)}.$$

(d) En déduire que g est continue sur $[0, 1]$ puis que φ est continue sur $]0, 1[$.

En déduire que la fonction φ est continue sur D .

4. Etude de φ en 0 et en 1 :

(a) Montrer que : $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et que : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$.

(b) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1 .

Partie II: Etude de l'opérateur T

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

T est l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

On note, pour tout entier naturel k , e_k l'élément de E défini par: $\forall x \in [0, 1], e_k(x) = x^k$ et pour tout entier naturel n , F_n le sous espace vectoriel de E dont une base est $\mathcal{B}_n = (e_k)_{k \in [0, n]}$.

5. Vérifier que T est un endomorphisme de E .

6. Etude de T sur F_n :

(a) Vérifier que: $\forall f \in F_n, T(f) \in F_n$.

On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par: $\forall f \in F_n, T_n(f) = T(f)$.

(b) Déterminer la matrice de T_n dans la base $\mathcal{B}_n$.

(c) Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?

7. Etude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2 \cdot id_E)$:

(a) Montrer que $\text{Ker}(T - 2 \cdot id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Soit f un élément de $\text{Ker}(T - 2 \cdot id_E)$. On note $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$.
On fixe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[0, 1]$ tel que $M = f(x_1)$.

(b) Montrer que : $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$.

(d) En déduire que : $m = f(0)$.

(e) Faire une étude similaire pour M .

(f) Montrer alors que f est constante.

8. Etude de la fonction cot:

Pour tout x dans l'ensemble D , on note $\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

(a) Vérifier que cot est définie et continue sur D , qu'elle est impaire et périodique de période 1 .

(b) Montrer que : $\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et que : $\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}x$.

(c) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1 .

(d) Démontrer que, pour tout nombre réel x dans D , on a : $\frac{x}{2} \in D, \frac{x+1}{2} \in D$ et $\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$.

9. Calcul de φ :

(a) Vérifier que, pour tout nombre réel x dans D , $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.

(b) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$.

(c) Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit : $\forall x \in D, \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.

10. Première application :

(a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout nombre réel x dans $]0, 1[$, on pose $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) Vérifier que $\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}$.

(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

- (d) Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie III: Développement eulérien de la fonction sinus

Pour tout n entier naturel non nul et tout nombre réel x dans $[0, 1[$, on pose

$$\alpha_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \quad \text{et} \quad \beta_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)$$

11. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $[0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(x)$ converge. On note

$$\text{alors } \beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$$

12. Explicitation de β : on fixe un nombre réel x dans $]0, 1[$.

- (a) Pour N entier naturel non nul, calculer $\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

- (b) Justifier l'existence de $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$.

- (c) Montrer que : $\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

- (d) En déduire que : $\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$

- (e) Montrer alors que, pour tout nombre réel x dans $]0, 1[$, $\beta(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$.

13. Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul n , on pose $P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$.

- (a) Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0, 1[$, la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente.

Dans la suite, on pose $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ et on note : $P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$.

- (b) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0, 1[$, $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

- (c) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x . On note encore $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$

- (d) Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel dans $] -n, n[$, montrer que $P_n(x+1) = - \left(\frac{n+1+x}{n-x} \right) P_n(x)$.

- (e) En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

- (f) Montrer alors que, pour tout nombre réel x , $P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$.

Partie IV : Un autre développement du sinus

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, on pose

$$\lambda_n(x) = \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt \text{ et } v_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}$$

14. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente. La fonction ψ définie au début de l'énoncé est donc définie sur $D \cup \{0\}$.
15. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$,

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) v_n(x)$$

Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

16. Pour tout nombre réel t et tout entier naturel non nul n , on pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

On **admet** que si t n'est pas de la forme $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, alors $C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$.

- (a) Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec p dans $\mathbb{Z}$.
- (b) Donner la valeur de $I_n = \int_0^\pi C_n(t) dt$.
17. Soit F une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi F(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt \right) = 0$.
18. Pour x élément de D , on définit la fonction Φ_x sur $[0, \pi]$ par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\cos(xt) - 1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que Φ_x est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.
- (b) Vérifier que :

$$\forall t \in [0, \pi], C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D, \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt + I_n$$

19. Application :

- (a) Démontrer, à l'aide des questions précédentes que, pour tout x élément de D ,

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}$$

- (b) En déduire que, pour tout x élément de D , $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$.