DM n° 5 - pour le mardi 25 novembre 2025

Problème : lancer de jetons

On considère deux jetons J_1 et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série illimitée de lancers **avec ce même jeton**.

On note E l'événement " le jeton J_1 est choisi pour le jeu ", et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement " on obtient la face numéro 0 au lancer numéro k ".
On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la face portant le numéro 0 pour la première fois et on note $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition d'une face portant le numéro 1 pour la première fois et on note $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.

Partie I : Etude de la variable aléatoire X

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $P([X = n]) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
2. En déduire par un calcul que $P([X = 0]) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire que la variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis préciser son espérance et sa variance.
4. En déduire que X admet une espérance et une variance et préciser les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.
5. Compléter le script suivant afin qu'il simule l'expérience précédente en mettant dans la variable `jeton` le numéro du jeton choisi et en donnant la valeur de X.

```
import numpy.random as rd
jeton = ..........
if jeton==1 :
      X=.....
else :
      X=.....
```


Partie II : Etude de la variable aléatoire Y

1. Justifier que $P([Y = 1]) = \dfrac{3}{4}$ puis que : $\forall n \geq 2 \quad P([Y = n]) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$
2. En déduire que $P([Y = 0]) = 0$.
3. Montrer que Y a une espérance puis montrer que $E(Y) = \frac{3}{2}$.
4. Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance.
   En déduire que Y^2 admet une espérance et préciser la valeur de $E(Y^2)$.
5. En déduire que la variable Y admet une variance et calculer la variance de Y.
6. Compléter le script suivant afin qu'il simule l'expérience précédente en mettant dans la variable `jeton` le numéro du jeton choisi et en donnant la valeur de Y.

```
import numpy.random as rd
jeton = ..........
if jeton==1 :
      Y=.....
else :
      Y=.....
```

Partie III : Etude du min et du max des deux variables X et Y

1. On définit sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ la variable aléatoire $S = Max(X, Y)$ par :
   $\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$.
   (a) Déterminer $S(\Omega)$.
   (b) Justifier que $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$, $P([X = 1] \cap [Y = 0]) = 0$,
   puis que $P([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{2}$.
   En déduire enfin que $P([S = 1]) = \frac{1}{2}$.
   (c) Soit n un entier supérieur ou égal 2.
   Justifier que $[X = n] \cap [Y < n] = [X = n]$,
   puis que $[Y = n] \cap [X < n] = [Y = n]$.
   En déduire que : $P([S = n]) = P([X = n]) + P([Y = n])$.
   (d) En déduire la loi de S, puis préciser son espérance, et sa variance.

2. On définit sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ la variable aléatoire T par : $\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.
   (a) Justifier que $T(\Omega) = \{0, 1\}$.
   (b) Justifier que $P([X > 0] \cap [Y = 0]) = 0$, puis que $[X = 0] \cap [Y > 0] = [X = 0]$.
   En déduire la valeur de $P(T = 0)$.
   (c) Déterminer la loi de T, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie IV au dos !!

Partie IV : Etude du nombre de faces numéro 1

Dans cette question, on considère un entier naturel non nul n fixé, et on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de faces portant le numéro 1 que l'on obtient au cours de n lancers.

1. Préciser $Z_n(\Omega)$.

2. Dans cette question uniquement, on suppose que le jeton J_1 a été choisi. Reconnaître alors la loi de Z_n.

3. En déduire la valeur de $P_E(Z_n = k)$, pour tout $k \in T_n(\Omega)$.

4. Montrer alors que pour tout $k \in T_n(\Omega)$,

$$P([Z_n = k]) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^{n+1} & \text{si } \ k < n \\ (\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{2} & \text{si } \ k = n \end{cases}$$

   Vérifier que l'on a bien $\sum_{k \in Z_n(\Omega)} P([Z_n = k]) = 1$.

5. Calculer l'espérance de Z_n et interpréter ce résultat.

6. Calculer la variance de Z_n.

7. Compléter le script suivant afin qu'il simule l'expérience en donnant la valeur de Z_n.

```
import numpy.random as rd
n=int(input("Entrer n:"))
jeton = ..........
if jeton==1 :
      Z=.....
else :
      Z=.....
```