

Chapitre 7 - Variables aléatoires à densité

I. Fonction de répartition

I.1) Rappels

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **fonction de répartition de la variable aléatoire** X , la fonction notée F_X définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F_X(x) = P([X \leq x]) \end{aligned}$$

Proposition I.1

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire sur cet espace probabilisé. On note F_X sa fonction de répartition.

1. **monotonie** : F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. **limites** : $\lim_{t \rightarrow -\infty} (F_X(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (F_X(t)) = 1$
3. **continuité à droite en tout point** : F_X est continue à droite en tout réel.

Proposition I.2

Une autre propriété

Pour tout réel a , $P([X = a]) = F_X(a) - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t)$.

Proposition I.3

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si la fonction F vérifie les trois propriétés suivantes :

1. F est fonction continue à droite en tout réel.
2. F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} (F_X(t)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (F_X(t)) = 1$

alors F est la **fonction de répartition d'une variable aléatoire** X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

I.2) Exemple d'un nouveau type de variable aléatoire

On note

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \in [1, +\infty[&\mapsto F(x) = \frac{2x-2}{2x-1} \\ x < 1 &\mapsto F(x) = 0 \end{aligned}$$

1. Montrer que F est une fonction de répartition et tracer son tableau de variation.
2. Dessiner la courbe de la fonction F .
3. On note X une variable aléatoire de fonction de répartition F .
Calculer $P(X > 2)$, $P(2 < X \leq 3)$, $P(X = 2)$, $P_{[X > 2]}(X < 3)$.

II. Variable aléatoire à densité

II.1) Définition

Définition II.1

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire sur cet espace probabilisé. On dit que X est un **variable aléatoire à densité** lorsque sa fonction de répartition F_X vérifie les deux propriétés suivantes :

1. F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$
 2. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus E$ où E est un ensemble fini de nombres réels.
- L'ensemble E est appelé **ensemble des points critiques** de X (ou de F_X).

II.2) Densité de X

Définition II.2

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, positive et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ est appelée une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire **à densité** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit F_X sa fonction de répartition et $E = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ l'ensemble de ses points critiques.

$$\begin{aligned} \text{On construit la fonction suivante } f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \in \mathbb{R} \setminus E &\mapsto F'_X(x) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} a_1 &\mapsto b_1 \geq 0 \\ a_2 &\mapsto b_2 \geq 0 \\ &\vdots \\ a_r &\mapsto b_r \geq 0 \end{aligned} \right\} \text{arbitraire}$$

Proposition II.1

La fonction f est un **densité de probabilité**. On dit que c'est UNE densité de X et qu'elle est associée à F_X .

Exercice 1

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2. Tracer le graphe de F .
3. Déterminer une densité de X . Tracer la courbe de cette densité.

II.3) D'une densité vers la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit f une densité de X . Alors, la fonction de répartition de X est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt}$

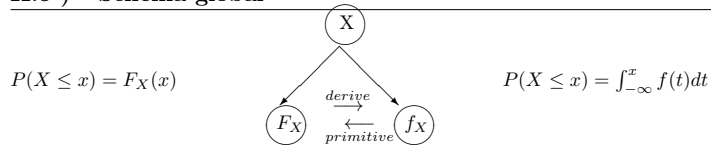
II.4) Points critiques d'une variable aléatoire à densité

Soient X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, f une densité de X et F_X sa fonction de répartition.

- L'ensemble des points critiques de X est l'ensemble des points de **discontinuité** de la fonction f .
- L'ensemble des points critiques de X est l'ensemble des points où la fonction F n'est pas dérivable.
- F_X est une primitive de la fonction f sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} \setminus E$.
- Si une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ vérifie les trois propriétés suivantes :
 1. G est une primitive de f sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} \setminus E$
 2. La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$
 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (G(x)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (G(x)) = 1$

Alors $\boxed{G = F_X}$

II.5) Schéma global



II.6) Univers image

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On rappelle que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et que $X(\Omega) = \{X(\omega) \text{ tels que } \omega \in \Omega\}$.

On admettra que

$$X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) > 0\}$$

Ainsi l'ensemble $X(\Omega)$ pour une variable aléatoire est défini à quelques points près, comme le support d'une densité de X .

II.7) Formulaire pour une variable à densité

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note f une densité de X .

Soient a et b des réels tels que $a < b$.

$$P(X \leq a) = \dots$$

$$P(X = a) = \dots$$

$$P(X > a) = \dots$$

$$P(a < X \leq b) = \dots$$

III. Loi d'une variable à densité

III.1) Déterminer une loi

III.1.1 Cas général

Déterminer la loi d'une variable aléatoire consiste à déterminer sa fonction de répartition.

Définition III.1

Soient X et Y des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que les variables aléatoires X et Y ont la même loi lorsqu'elles ont la même fonction de répartition, c'est à dire lorsque $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq t) = \dots$

III.1.2 Cas d'une variable à densité

Définition III.2

Soient X et Y des variables aléatoires réelles définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Si X est une variable aléatoire à densité alors toute fonction f_X qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points (éventuellement aucun) est une densité de X .

- Si X est une variable aléatoire à densité alors la donnée d'une densité de X caractérise la loi de X .

- Si X et Y sont des variables à densité et si leurs densités coïncident sauf en un nombre fini de points alors les variables X et Y ont la même loi.

III.1.3 loi de $g(X)$ et $g(Y)$

Proposition III.1

Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si les variables aléatoires X et Y admettent la même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors les variables $g(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires réelles admettant la même loi.

III.2) Transformation affine d'une variable à densité

III.2.1 Cas général : loi de $aX + b$

Théorème III.1

(HP)

Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X . On note $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = at + b$

Alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité de densité f_{aX+b} définie par :

$$\begin{aligned} f_{aX+b} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f_{aX+b}(y) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } y \in g(X(\Omega)) \\ 0 & \text{si } y \notin g(X(\Omega)) \end{cases} \end{aligned}$$

A noter : $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$.

Attention **la formule est HP**, il faut donc savoir la retrouver !!!

Exemple

Reprenons l'exercice 2 page 2. On considère la variable aléatoire $Y = 2X - 3$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y .

III.3) Comment déterminer la loi de X^2 ?

Si X est une variable aléatoire discrète :

on détermine d'abord $X^2(\Omega)$
puis pour tout entier x de $X^2(\Omega)$, on calcule $P(X^2 = x)$ en remarquant que si $x > 0$ alors $(X^2 = x) = (X = -\sqrt{x}) \cup (X = \sqrt{x})$.

Exemple :

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-5, 5])$.

Déterminer la loi de X^2 .

Si X est une variable aléatoire à densité :

on détermine d'abord $X^2(\Omega)$
puis pour tout réel x de $X^2(\Omega)$,
on calcule $P(X^2 \leq x)$ en remarquant que si $x > 0$,
 $(X^2 \leq x) = (-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$.

Exemple :

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Déterminer la loi de X^2 .

III.4) Comment déterminer la loi de $|X|$?

Si X est une variable aléatoire à densité de densité f ,

on détermine d'abord $|X|(\Omega)$.
Puis pour tout réel x de $|X|(\Omega)$, on calcule $P(|X| \leq x)$ en remarquant que
 $\forall x \in \mathbb{R}^+, P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x)$.

III.5) Comment déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$?

Si X est une variable aléatoire à densité de densité f ,

alors on détermine d'abord $\lfloor X \rfloor(\Omega)$. On remarque que $\lfloor X \rfloor(\Omega) \subset \dots$

Puis pour tout entier k de $\lfloor X \rfloor(\Omega)$, on calcule $P(\lfloor X \rfloor = k)$ en remarquant que
 $P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leq X < k + 1)$.

Attention !!! $\lfloor X \rfloor$ est une variable aléatoire discrète.

Exercice 2

Un classique à savoir refaire

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$. On note $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Reconnaître la loi de Y .

IV. Espérance d'une VAR à densité

IV.1) Définition

Définition IV.1

Soient X une variable aléatoire **à densité** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f_X une densité de X .

On dit que X **admet une espérance** lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente.
Dans ce cas, on appelle ce réel **espérance de X** et on note $E(X)$ le réel défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

Exemple

Reprenons l'exercice 2 page 2. Justifier que X admet une espérance et calculer cette espérance.

IV.2) Propriétés

Toutes les propriétés de l'espérance vues dans le chapitre II restent valable pour les variables aléatoires à densité :

- la linéarité de l'espérance
- La croissance et la positivité de l'espérance
- Le critère d'existence par domination

IV.3) Formule de transfert pour une variable à densité

Théorème IV.1

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit a désignant un réel ou $-\infty$. Soit b désignant un réel ou $+\infty$ tel que $a < b$.
On suppose que X admet une densité f_X nulle en dehors de l'intervalle $]a, b[$ (c'est à dire $X(\Omega) \subset]a, b[$)
On suppose que φ est une fonction **continue** sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

1. La variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance **si et seulement si**
l'intégrale $\int_a^b \varphi(t) f(t) dt$ converge absolument.
2. Si la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance alors

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) \cdot f(t) dt$$

Exercice 3

On suppose X suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.
On note $Y = \cos(\pi X)$. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Exercice 4

X suit une loi normale centrée réduite. On note $Y = e^{X+1}$.
Montrer que Y admet une espérance et déterminer l'espérance de Y .

V. Moments d'une VAR

V.1) Moments d'ordre r (HP)

Définition V.1

Soit r un entier non nul.

Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou à densité) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On dit que la variable aléatoire réelle X **admet un moment d'ordre r** quand X^r admet une espérance.

Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre r , alors le réel

$$m_r(X) = E(X^r)$$

est appelé **le moment d'ordre r de X** .

Proposition V.1

Si X est une variable aléatoire à densité et si X admet un moment d'ordre r , alors

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$$

Exercice 5

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $E(X^r)$ existe, alors pour tout $s \in [[1, r]]$, $E(X^s)$ existe.

VI. Variance d'une variable aléatoire réelle

Définition VI.1

Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou à densité) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

On appelle **variance de X** et on note $V(X)$ le réel défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Théorème VI.1

Formule de Koenig-Huygens.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors X admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Théorème VI.2

Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2,

Soit Y une variable aléatoire réelle.

- $V(X) \geq 0$

- pour tout couple de réels (a, b) , $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$$

- $V(X) = 0$ si et seulement si $X = E(X)$ presque sûrement.

- Si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** admettant une variance **alors** $X + Y$ admet une variance et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Si de plus a et b sont deux réels alors

$$V(aX + bY) = a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y)$$

Définition VI.2

Ecart-type

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2.

On appelle **écart-type de la variable aléatoire réelle X** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Interprétation

La variance et l'écart type d'une variable X mesurent la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne.

Définition VI.3

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que la variable X est **centrée réduite** lorsque la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(X) = 0 \text{ et } \sigma(X) = 1$$

Proposition VI.1

Variable centrée réduite associée

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. On suppose que $V(X) \neq 0$

La variable aléatoire réelle

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire réelle centrée réduite.

On dit que la variable X^* est **la variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X** .

VII. Loi uniforme

VII.1) Un exercice

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note f la fonction définie par

$$f : \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t < a & \mapsto & f(t) = 0 \\ a \leq t \leq b & \mapsto & f(t) = \frac{1}{b-a} \\ t > b & \mapsto & f(t) = 0 \end{array}$$

1. Tracer la courbe de f .
2. Justifier que f est une densité de probabilité. Soit X une variable à densité de densité f .
3. Déterminer la fonction de répartition de X , puis tracer l'allure de sa courbe représentative.
4. Justifier que X admet une espérance et calculer cette espérance
5. Justifier que X admet une variance et calculer cette variance.

VII.2) Définition

Définition VII.1

Avec la fonction de répartition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que X **suit une loi uniforme sur** $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ lorsque sa fonction de répartition F est définie par:

$$F : \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x < a & \mapsto & F(x) = 0 \\ a \leq x \leq b & \mapsto & F(x) = \frac{x-a}{b-a} \\ x > b & \mapsto & F(x) = 1 \end{array}$$

Définition VII.2

Avec une densité

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que X **suit une loi uniforme sur** $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est définie de la manière suivante:

$$f : \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t < a & \mapsto & f(t) = 0 \\ a \leq t \leq b & \mapsto & f(t) = \frac{1}{b-a} \\ t > b & \mapsto & f(t) = 0 \end{array}$$

points critiques, univers image

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors $E = \{a, b\}$ et $X(\Omega) = [a, b]$

On note aussi : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{]a,b[}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{]a,b]}$

Théorème VII.1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors X admet une espérance et une variance,

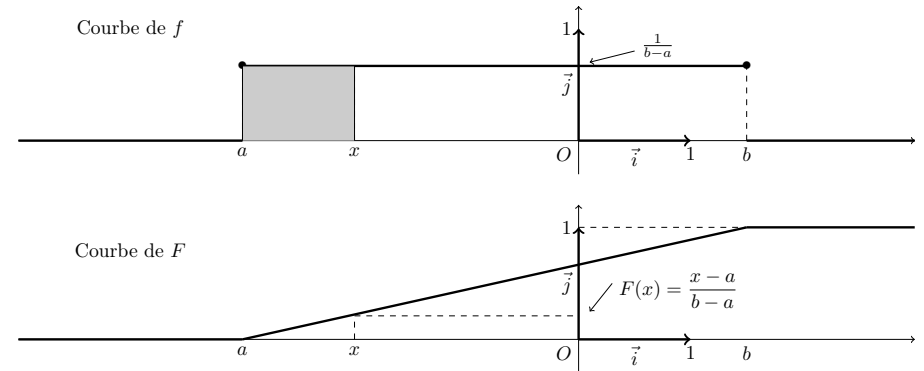
$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

VII.2.1 Courbes

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit loi uniforme sur $[a, b]$.

Traçons les courbes de f et de F l'une en dessous de l'autre :



VII.3) Stabilité par transformation affine pour les lois uniformes

Proposition VII.1

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]} \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$$

Proposition VII.2

Soient α et β deux réels tels que $\alpha \neq 0$. On note $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \alpha t + \beta$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme, alors la variable aléatoire $Y = \alpha X + \beta$ suit une loi uniforme de support $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$.

Remarque

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soient α et β deux réels.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé, $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$. On note $Y = \alpha X + \beta$.

Pour obtenir la loi de Y , on commencera par déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ puis on appliquera le théorème de stabilité par transformation affine pour les lois uniformes.

Exercice 6

Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Donner les densités, fonctions de répartition, espérance dans chacun des cas suivants.

$$i) X \hookrightarrow \mathcal{U}_{([0,1])} \quad ii) X \hookrightarrow \mathcal{U}_{([-2,5])}$$

2. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{([-2,5])}$. Déterminer la loi de $Y = -2X + 3$.

VII.4) Loi uniforme (continue) en Python

VIII. Loi exponentielle

VIII.1) Un exercice

Soit α un nombre réel strictement positif. On note f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t < 0 &\mapsto f(t) = 0 \\ t \geq 0 &\mapsto f(t) = \alpha e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

1. Justifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de sa courbe dans un repère orthonormé. On considère une variable aléatoire X à densité de densité f .
2. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de la courbe représentative de F .
3. Justifier que X admet une espérance et calculer cette espérance.
4. Justifier que X admet une variance et calculer cette variance.

VIII.2) Définition

Définition VIII.1 Avec la fonction de répartition

Soit α un réel strictement positif.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que X suit **une loi exponentielle de paramètre α** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ lorsque la fonction de répartition de X est définie par:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x < 0 &\mapsto F(x) = 0 \\ x \geq 0 &\mapsto F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

Définition VIII.2 Par une densité

Soit α un réel strictement positif.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que X suit **une loi exponentielle de paramètre α** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t < 0 &\mapsto f(t) = 0 \\ t \geq 0 &\mapsto f(t) = \alpha e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Points critiques, univers image :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ alors $E = \{0\}$ et $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

Théorème VIII.1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

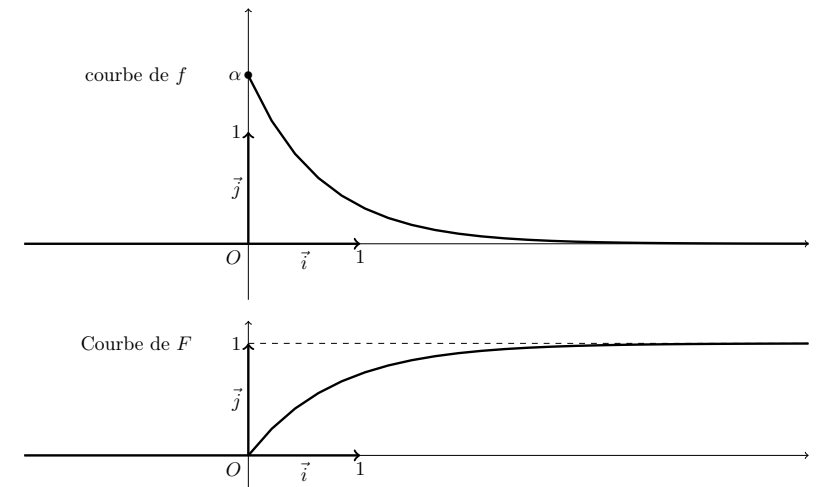
VIII.3) Loi exponentielle en Python

Attention !

VIII.4) Courbes

Soient α un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit loi exponentielle de paramètre α .

Trçons les courbes de F_X et de f l'une en dessous de l'autre.



VIII.5) Stabilité par transformation linéaire pour les lois exponentielles

Proposition VIII.1

Soient α un réel strictement positif.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\alpha} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha) \iff \alpha X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y = \ln(X)$.

On admet que Y est une variable aléatoire. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y .

VIII.6) Modèle

Durée de vie : On note X la durée de vie d'un appareil qui est mis en route à l'instant $t = 0$.
Comment traduire avec X les événements suivants

- A : "il tombe en panne à l'instant t " ?
 B : "il est en panne à l'instant t " ?
 C : "il fonctionne à l'instant t " ?

Modèle : On dit que la durée de vie est **sans mémoire** si le fait d'avoir déjà fonctionné un certain temps n'influe pas sur le temps de (bon) fonctionnement ultérieur.

Processus sans mémoire :

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
On dit que la variable X est **sans mémoire** lorsque

$$\forall t \geq 0 \text{ et } \forall h \geq 0 : P_{[X > h]}(X > t + h) = P(X > t)$$

Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à densité et admettant une densité à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$X \text{ suit une loi exponentielle} \iff X \text{ est sans mémoire et } P(X \geq 0) = 1$$

Autrement dit : **Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle sont les seules variables aléatoires positives sans mémoire.**

Preuve

1. Soient $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre α .

- (a) Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $P(X > x)$ est non nul.
(b) Montrer que pour tous réels positifs t et h ,

$$P_{[X > h]}(X > t + h) = P(X > t)$$

2. soit X une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) > 0.$$

On suppose de plus, que $P(X \geq 0) = 1$ et que, pour tous réels positifs t et h ,

$$P_{[X > h]}(X > t + h) = P(X > t)$$

On note $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = P(X > x)$.

- (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer sa dérivée en fonction de f
(b) Justifier que $g(x)$ est non nul pour tout réel x positif.
(c) Justifier que $\forall h \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x + h) = g(x)g(h)$.
(d) On note $\alpha = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif ou nul, on a la relation $g'(x) + \alpha g(x) = 0$.
(e) Calculer la dérivée de $x \mapsto g(x)e^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}_+$
(f) Dédire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

IX. Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

IX.1) Intégrale de Gauss (rappel)

Théorème IX.1

Intégrale de Gauss

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

IX.2) Une nouvelle fonction : la fonction Φ

On note : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
- Déterminer les coordonnées des points d'inflexions à la courbe de f .
- Tracer la courbe de f et placer les tangentes à la courbe aux points d'inflexion.
- Justifier que f est une densité de probabilité.
- Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . Tracer sa courbe en dessous de la courbe de f . Préciser la valeur de $\Phi(0)$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) + \Phi(x) = 1$.

Théorème IX.2

La fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite Φ vérifie :

- la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, 1[$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

IX.3) Loi normale centrée réduite

Définition IX.1

Par la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que X **suit la loi normale centrée réduite et on note** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ lorsque sa fonction de répartition Φ est définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

Remarque

Cette fonction n'est pas calculable !

Définition IX.2

Par une densité

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que X **suit la loi normale centrée réduite et on note** $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est définie de la manière suivante:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Points critiques, univers image

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $E = \emptyset$ et $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Théorème IX.3

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors X admet une espérance et $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

IX.4) Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2

Théorème IX.4

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$

On admettra que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$$

Proposition IX.1

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$

On note :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La fonction f est une densité de probabilité.

Définition IX.3

Par la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$

On dit que X **suit une loi normale de paramètres** (m, σ^2) et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ lorsque sa fonction de répartition F est définie par:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \end{aligned}$$

Définition IX.4

Par une densité

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$

On dit que X **suit une loi normale de paramètres** (m, σ^2) et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est définie de la manière suivante:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

A retenir

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la courbe de la densité de X (ci dessus) admet un maximum au point d'abscisse m et deux points d'inflexions d'abscisses $m - \sigma$ et $m + \sigma$.

Points critiques, univers image

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $E = \emptyset$ et $X(\Omega) = \mathbb{R}$

Théorème IX.5

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet un moment d'ordre 2 et

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2$$

IX.5) Stabilité des lois normales par transformation affine

Théorème IX.6

Théorème de centrage-réduction

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors la variable définie par $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Théorème IX.7

Stabilité par transformation affine

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.

Si une variable aléatoire X suit une loi normale alors n'importe quelle transformée affine $aX + b$ de cette variable aléatoire suit encore une loi normale.

Pour obtenir les paramètres de la loi de $aX + b$, on calculera l'espérance et la variance de la variable $aX + b$, puis on évoquera le théorème de stabilité par transformation affine pour une loi normale.

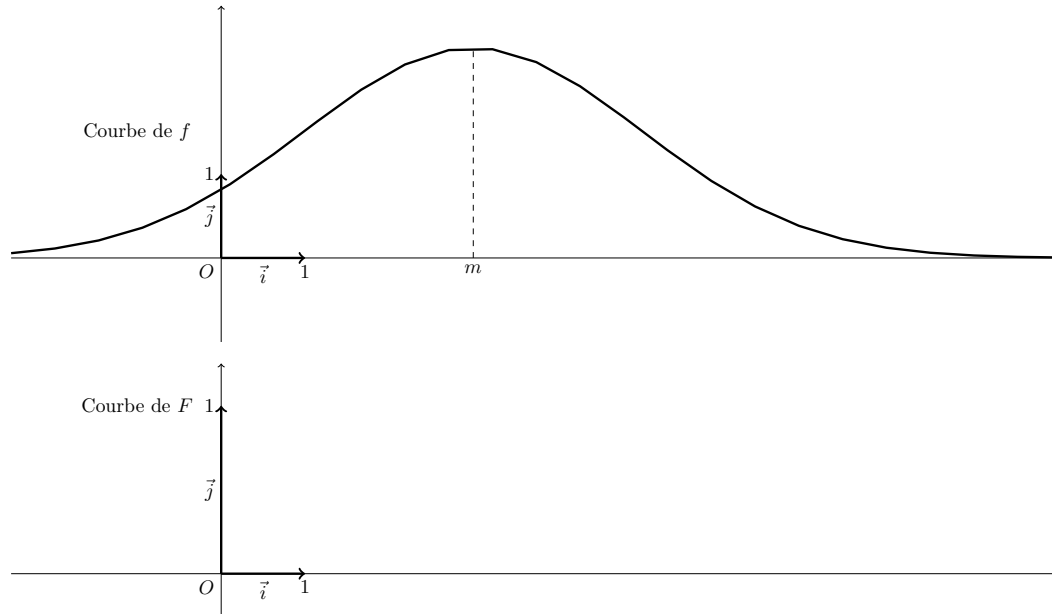
Exercice 8

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres $(1, 3)$.

Préciser une densité de X puis déterminer une densité de la variable $5 - X$, puis de la variable $2X - 4$.

IX.6) Courbes

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$. On suppose que X est une variable aléatoire à densité qui suit **une loi normale de paramètres** (m, σ^2) .



IX.7) Simulation en Python

IX.8) Des exercices

Exercice 9

Calculs d'intégrales

Justifier que l'intégrale suivante existe et la calculer.

$$I = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

Exercice 10

On suppose que $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Justifier que X^2 est une variable à densité et déterminer une densité de X^2 .

X. Indépendance de VAR

X.1) Rappels : Définitions, Coalition

X.1.1 Cas de deux variables

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** lorsque :

pour tout couple de réels (x, y) les événements $(X \leq x)$ et $(Y \leq y)$ sont indépendants.

X.1.2 Cas de n variables mutuellement indépendantes

Définition X.1

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles définies le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de réels,

les événements $(X_1 \leq x_1), (X_2 \leq x_2), \dots, (X_n \leq x_n)$ sont mutuellement indépendants.

X.1.3 Lemme de coalition

Les deux versions du Lemme de coalition sont valables pour les variables à densité.

X.2) Loi de $\text{Min}(X, Y)$ et de $\text{Max}(X, Y)$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une même loi uniforme sur $[0, 1]$.

On note $Z = \text{Max}(X, Y)$.

Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z .

2. Soient a et b des réels strictement positifs. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs a et b .

On note $T = \text{Min}(X, Y)$.

Justifier que T est une variable à densité et déterminer une densité de T .

X.3) Loi de la somme : produit de convolution dans le cas des variables à densités

Théorème X.1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densités respectives f_X et f_Y .

On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

Si la fonction h est définie, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points alors h est une densité et $X + Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

La fonction h s'appelle le **produit de convolution** de f_X et f_Y .

Remarque

Le changement de variable $u = x - t$ permet d'établir que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt$$

Théorème X.2

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité, **indépendantes**, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densités respectives f_X et f_Y .

On note $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

Si f_X ou f_Y est bornée sur $\mathbb{R}$ alors la fonction h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt$$

X.3.1 En pratique

Pour obtenir une densité d'une variable $X+Y$ il faudra s'assurer :

- que les variables X et Y sont bien des variables à densité et qu'elles sont indépendantes
- qu'il ne s'agit pas de lois usuelles qui vérifient des thm de stabilité par la somme
- déterminer $(X+Y)(\Omega)$: ainsi $\forall x \notin (X+Y)(\Omega), h(x) = 0$
- vérifier que l'une des densités est bornées sur $\mathbb{R}$ (ce n'est pas toujours le cas).

Exercice 11

Soient λ et μ des réels strictement positifs tels que $\lambda \neq \mu$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ .

On note $Z = X+Y$.

Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z

X.4) Espérance du produit de deux variables réelles indépendantes

Théorème X.3

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si X et Y sont des variables aléatoires à densité **indépendantes**, admettant une espérance **alors XY** est une variable aléatoire admettant une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

XI. La loi petit gamma

XI.1) Rappel : la fonction Gamma

On rappelle que l'on a étudié la fonction Γ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On a montré que : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) > 0$

XI.2) Densité d'une loi petit gamma

Définition XI.1

Soit ν un réel **strictement positif**.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que X suit **une loi petit gamma de paramètre ν** et on note $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ lorsque X est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{aligned} t \leq 0 &\mapsto f(t) = 0 \\ t > 0 &\mapsto f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} \end{aligned}$$

Remarque

$$X \hookrightarrow \gamma(1) \iff X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$

Remarque

Il faudra savoir tracer la courbe de cette densité suivant les valeurs de ν suivant les trois cas $\nu \in]0, 1[$, $\nu = 1$ et $\nu > 1$.

Points critiques, univers image

Si $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ alors $E = \{0\}$ et $X(\Omega) =]0, +\infty[$

Théorème XI.1

Si $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ alors X admet un moment d'ordre 2,

$$E(X) = \nu \quad \text{et} \quad V(X) = \nu$$

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire suivant la loi petit gamma de paramètre 2. On note $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y .

XI.3) Courbes en Python

Tracer les courbes en Python d'une densité d'une loi γ suivant les valeurs du paramètre.

XII. Théorèmes de stabilité pour la somme

XII.1) Théorème de stabilité pour les lois petit gamma

XII.1.1 Cas de deux variables

Théorème XII.1

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $\nu_1 \in]0, +\infty[$ et $\nu_2 \in]0, +\infty[$

Si $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables **indépendantes**

alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$

XII.1.2 Cas de m variables

Théorème XII.2

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) \in]0, +\infty[)^m$.

On considère $X_1, X_2, \dots, X_m$ une famille de m variables aléatoires réelles telles que :

$\forall k \in [[1, m]]$, $X_k \hookrightarrow \gamma(\nu_k)$.

Si les m variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_m$ sont **mutuellement indépendantes**

alors $X_1 + X_2 + \dots + X_m \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m)$

XII.1.3 Conséquences sur les lois exponentielles de paramètre 1

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_m$ une famille de m variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $\forall k \in [[1, m]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et si les m variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_m$ sont mutuellement indépendantes

alors $X_1 + X_2 + \dots + X_m \hookrightarrow \dots$

XII.2) Théorème de stabilité pour la somme pour les lois normales

XII.2.1 Cas de deux variables

Théorème XII.3

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soient $m_1 \in \mathbb{R}$ et $m_2 \in \mathbb{R}$. Soient $\sigma_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

XII.2.2 Cas de r variables

Théorème XII.4

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2, soit $(m_1, m_2, \dots, m_r) \in \mathbb{R}^r$ et $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in (\mathbb{R}_+^*)^r$. On considère $X_1, X_2, \dots, X_r$ une famille de r variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $\forall k \in [[1, r]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ et si les r variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_r$ sont **mutuellement indépendantes**, alors

$$X_1 + X_2 + \dots + X_r \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \dots + m_r, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2)$$

XIII. Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

XIII.1) Inégalité de Markov

Théorème XIII.1

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire si $X \geq 0$), et si X admet une espérance, alors

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration de l'inégalité de Markov:

Avec les hypothèses de l'énoncé.

Soit a un réel strictement positif. On note A l'événement $A = [X \geq a]$ On note $\mathbb{1}_A$ la variable indicatrice de l'événement A .

1. Rappeler la définition de la variable $\mathbb{1}_A$.
2. Calculer l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.
3. Montrer que $a \times \mathbb{1}_A \leq X$. En déduire l'inégalité de Markov.

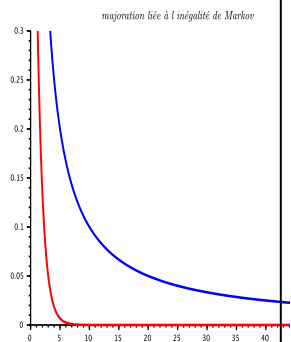
XIII.2) Une application

Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(\nu)$ où $\nu > 0$.

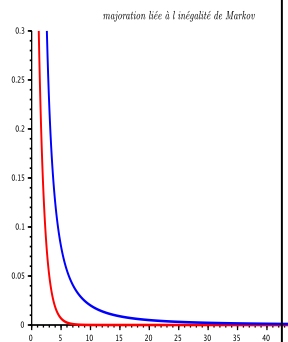
Soit r un entier naturel.

1. Justifier que X admet un moment d'ordre r et calculer ce moment d'ordre r .
2. Justifier que $\forall a > 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^r)}{a^r}$

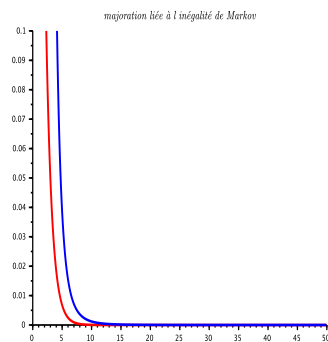
Pour $\nu = 1$ et $r = 1$



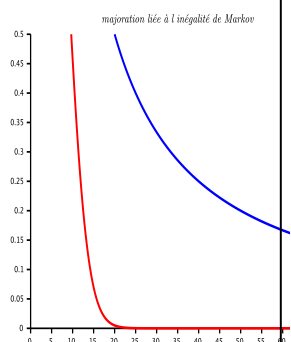
Pour $\nu = 1$ et $r = 2$



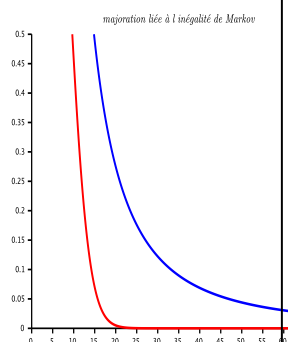
Pour $\nu = 1$ et $r = 5$



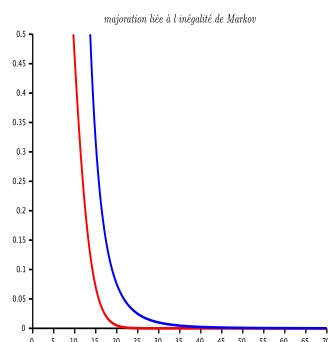
Pour $\nu = 10$ et $r = 1$



Pour $\nu = 10$ et $r = 2$



Pour $\nu = 10$ et $r = 5$



XIII.3) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème XIII.2

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que la variable X admet un moment d'ordre 2 et on note $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| > \varepsilon) \leq P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

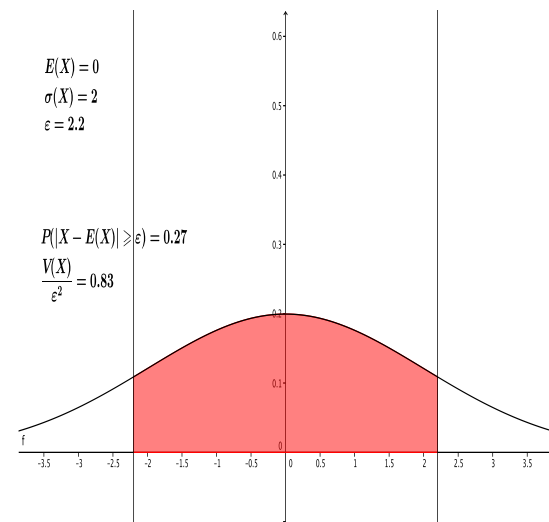
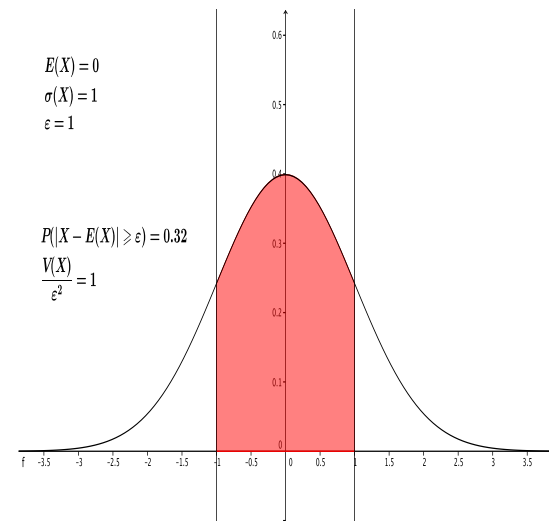
Démonstration :

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'obtient en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ et en remplaçant a par ε^2 .

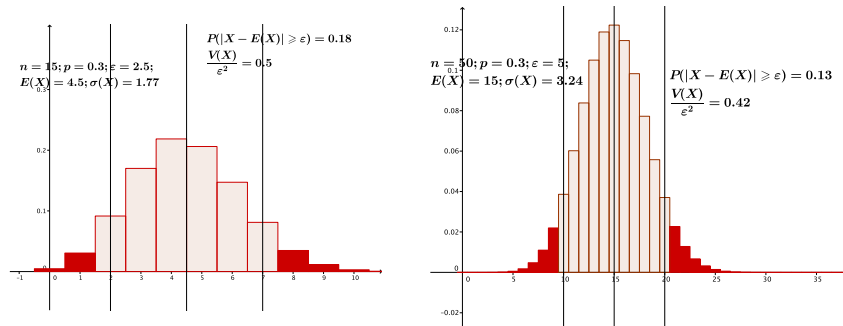
XIII.4) Interprétation de cette inégalité et applications

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne dépend pas de la loi de X (seulement de son espérance et de sa variance), elle fournit un majorant assez grossier de $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$. Souvent, on reconnait qu'il faut se servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev grâce aux valeurs absolues présentes dans la probabilité. En général, il faudra y penser lorsque l'on doit établir des inégalités pour des probabilités d'événements concernant une variable dont on connaît l'espérance et la variance.

CAS 1 : Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale centrée.



CAS 2 : Soit X une v.a.r. qui suit une loi binomiale,



Exercice 13

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

Montrer que $\forall \epsilon > 0, P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$. En déduire que $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$

Exercice 14

Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$