

---

## Exercices - Chapitre 7 - Variables à densité

---

### Exercice 1

On considère la fonction  $F$  définie par  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x < 1 &\mapsto F(x) = 0 \\ x \geq 1 &\mapsto F(x) = 1 - e^{2-2x} \end{aligned}$$

1. Montrer que  $F$  est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On note  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$ .
2. Déterminer les probabilités suivantes  $P(X \leq 2)$ ,  $P(X > -2)$ ,  $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 3\right)$ , et  $P_{[X \leq 5]}(X \leq 3)$ .
3. On note  $Y = \lfloor X \rfloor$ . On admettra que  $Y$  est une variable aléatoire. Justifier que  $Y$  est une variable aléatoire discrète et calculer sa loi.
4. On note  $Z = X - \lfloor X \rfloor$ . On admettra que  $Z$  est une variable aléatoire. Déterminer  $Z(\Omega)$ , puis la fonction de répartition de  $Z$ .

### Exercice 2

1. Déterminer un réel  $a$  tel que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{a}{\ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
3. La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ?
4. Calculer les probabilités  $P(0 \leq X \leq 4)$  et  $P(X \geq 5/2)$ .

### Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie suivante :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x < 0 &\mapsto f(x) = e^x \\ x \geq 0 &\mapsto f(x) = 0 \end{aligned}$$

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité. On note  $X$  une variable à densité de densité  $f$ .
2. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .
3. Montrer que  $X$  admet une espérance et calculer cette espérance.
4. Montrer que  $X$  admet une variance et calculer cette variance.
5. On note  $Y = X^2$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire réelle.
  - (a) Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ .
  - (b) Montrer que  $Y$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $Y$ .
  - (c) Même question avec  $Z = 2X + 1$ .

### Exercice 4

#### La loi de Cauchy

Soit  $a$  un réel. On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{\pi(1+x^2)}$

1. Déterminer  $a$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité. Pour toute la suite de l'exercice on prendra cette valeur de  $a$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité : on dit que  $X$  suit la loi de Cauchy

2.
  - (a) Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
  - (b) Calculer les probabilités :  $P(X \leq 0)$ ,  $P(X \geq 0)$ ,  $P(X \leq -1)$  et  $P(X \geq 1)$ .
  - (c) La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On note  $Y = \tan(Z)$  et on admettra que  $Y$  est une variable aléatoire.
  - (a) Montrer que  $Y$  suit la loi de Cauchy.
  - (b) En déduire un script en Python qui permet de simuler la loi de Cauchy.

*Quel est le nom de la méthode que nous avons employé pour simuler la loi de Cauchy ?*

### Exercice 5

#### Transformation d'une loi uniforme

Soit  $X$  une v.a.r. qui suit la loi uniforme de support  $[-3; 3]$ . On note  $Y = X^2$ . On admettra que  $Y$  est une v.a.r..

1. Rappeler une densité de  $X$  sa fonction de répartition, ainsi que la valeur de son espérance et de sa variance.
2. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ , puis montrer que  $Y$  est à densité.
3. Ecrire un programme Python qui simule  $Y$ .

### Exercice 6

#### Transformée affine d'une loi uniforme

Soit  $X$  une v.a.r. qui suit une loi  $\mathcal{U}_{[-2,3]}$ . On note  $Y = -4X + 7$ . On admettra que  $Y$  est une v.a.r..

1. Rappeler une densité de  $X$ , sa fonction de répartition, ainsi que les valeurs de son espérance et de sa variance
2. Justifier que  $Y$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $Y$ .

### Exercice 7

#### Autour de la loi exponentielle

Soit  $\lambda > 0$ . Soit  $X$  une v.a.r qui suit une loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  et  $Z = X^2$ . On admet que  $Z$  est une variable aléatoire réelle.

1. Rappeler une densité de  $X$ , sa fonction de répartition, ainsi que les valeurs de son espérance et de sa variance.
2. Vérifier que  $Z$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $Z$ .

### Exercice 8

#### Sur une loi petit gamma

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi  $\gamma(10)$ .

1. Soit  $Y = \ln(X)$ .

Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire à densité et donner une densité de  $Y$ .
2. On pose  $Z = |Y|$ .

Montrer que  $Z$  est une variable aléatoire à densité et donner une densité de  $Z$ .

### Exercice 9

#### Loi petit gamma

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètre  $\mu$ . On suppose que  $\mu > 0$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X$  admet un moment à l'ordre  $n$  et exprimer ce moment sous forme d'un produit en fonction de  $n$  et  $\mu$ .
2. On note  $Y = e^X$ . On admet que  $Y$  est une variable aléatoire réelle.
  - (a) Justifier que  $Y$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $Y$ .
  - (b) Montrer que  $Y$  n'a pas d'espérance.

### Exercice 10

#### Lois normales

1. Rappeler l'expression d'une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normal centrée et de variance 0.5, puis en déduire la convergence et les valeurs des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

2. Justifier que les intégrales suivantes existent et calculer ces intégrales.

$$K_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad K_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$$

$$K_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}x^2} dx.$$

3. Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes les deux une loi normale  $\mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$ . Quelle est la loi suivie par la variable  $3X - 5Y$  ?

### Exercice 11

**Un produit de convolution** On considère deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  indépendantes et suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit  $t \in ]0, +\infty[$ .

Montrer que la variable  $Y - tX$  est une variable à densité et qu'elle admet pour densité l'application  $h$  définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\frac{x}{t}}}{t+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2. On note  $Z = \frac{Y}{X}$ . En déduire la fonction de répartition de  $Z$ .

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $T = \frac{X}{X+Y}$

### Exercice 12

#### Lois de min et de Max

1. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  suivant une loi uniforme à densité de support  $X(\Omega) = [0, 1]$ .  
On note  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = \max(X, Y)$ .  
Justifier que  $Z$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $Z$ .
2. Soient  $a$  et  $b$  des réels strictement positifs.  
Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs  $a$  et  $b$ .  
On note  $T$  la variable aléatoire définie par  $T = \min(X, Y)$ .  
Justifier que  $T$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $T$ . Reconnaître la loi suivie par  $T$ .

### Exercice 13

#### Autour de la loi normale centrée réduite

Soit  $X$  une v.a.r qui suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. (a) Donner une valeur approchée de  $P(|X - 0.96| < 0.54)$  grâce à la table de de  $\Phi$  fournie dans le cours.  
(b) Déterminer  $t > 0$  tel que  $P(|X| < t) = 0.95$
2. Montrer que :  $\forall x \geq 0 \quad P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$ .
3. On note  $Y = |X|$ . On admettra que  $Y$  est une variable aléatoire.  
(a) En utilisant la fonction  $\Phi$ , déterminer la fonction de répartition de  $Y$  puis montrer que  $Y$  est à densité.

- (b) Calculer  $E(Y)$

4. On note  $Z = X^2$ . On admettra que  $X^2$  est une v.a.r.  
Montrer que  $Z$  est une v.a.r. à densité et préciser une densité de  $Z$ .
5. On note  $T = e^X$ . On admettra que  $T$  est une v.a.r.

- (a) Montrer que  $T$  est une v.a.r. à densité et préciser une densité de  $T$ .
- (b) Montrer que  $T$  admet une espérance et calculer cette espérance.

### Exercice 14

1. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$  est convergente et que  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} \forall x \leq 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$$

2. (a) Montrer que la fonction  $F$  définit une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on déterminera une densité  $f$ .  
(b) Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  pour densité.
  - i. Montrer que  $X$  admet une espérance  $E(X)$  et que  $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
  - ii. Montrer que la variable aléatoire  $X^2$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
  - iii. En déduire que  $X$  admet une variance et calculer cette variance.

### Exercice 15

#### Loi exponentielle bilatérale

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ .

1. (a) Montrer que  $f$  est une fonction paire.  
(b) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.  
*Dans la suite de l'exercice, on note  $Y$  une variable aléatoire à densité, de densité  $f$ .*
2. Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de la variable aléatoire  $Y$ .
3. Etablir l'existence de l'espérance  $E(Y)$  et de la variance  $V(Y)$ . Les calculer.
4. Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi que  $Y$ . Justifier que la variable  $Z_1 + Z_2$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $Z_1 + Z_2$ .
5. On note  $Z = |Y|$ . On admet que  $Z$  est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que  $Y$ .
  - (a) Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ . On la notera  $F_Z$ .
  - (b) Reconnaître la loi de  $Z$  puis en déduire l'espérance et la variance de  $Z$ .
6. Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes les deux une loi exponentielle de paramètre 1.
  - (a) Justifier que la variable  $-T_2$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $-T_2$ .
  - (b) Montrer que la variable  $T_1 - T_2$  a la même loi que  $Y$ .
  - (c) Justifier que la variable  $T_1 - T_2$  est centrée.
7. (a) Justifier que la fonction  $F_Y$  réalise une bijection. On notera  $F_Y^{-1}$  l'application réciproque de la fonction  $F_Y$ .  
(b) Ecrire un programme en Python permettant de tracer les courbes représentatives de  $F_Y$  et de  $F_Y^{-1}$  pour  $x$  élément de  $[-2, 2]$ .