Corrigé ex. 9 et 12 TD Probas VARD

Exercice 9 $P(X=Y)$,$P(X<Y)$,$P($"X **est paire)"...(Très Classique!!!)**

Paul et Camille passent un concours chaque année jusqu'à ce qu'ils réussissent à intégrer une école. La probabilité de réussite de chacun à ce concours vaut 1/3.
On note X (resp. Y) le nombre d'années nécessaires à Paul (resp. à Camille) pour intégrer. Ils passent leur premier concours la même année .
On suppose que les résultats d'une année à l'autre sont indépendants et que les résultats de Paul sont indépendants des résultats de Camille.

1. - Epreuve $\mathcal{E}$: "Paul passe le concours".
   - Succès : "il réussit le concours", de probabilité 1/3.
   - X est la variable égale au temps d'attente du premier succès, lorsque l'on répète l'épreuve $\mathcal{E}$ dans des conditions identiques et indépendantes.
   - Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)}$.

   De même $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$. Ainsi $E(X)=E(Y)=3$ et $V(X)=V(Y)=\frac{1-1/3}{(1/3)^2}=6$.

2. Calculons $P(X=Y)$. On remarque que

$$[X=Y]=([X=1]\cap[Y=1])\cup([X=2]\cap[Y=2])\cup...=\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X=k]\cap[Y=k]$$

   D'où, les événements étant incompatibles,

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k).P(Y=k) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{3})^2.(\frac{2}{3})^{2k-2} \\ &= \frac{1}{9}.\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{4}{9})^{k-1} \\ &= \frac{1}{9}.\sum_{i=0}^{+\infty}(\frac{4}{9})^{i} \\ &= \frac{1}{9}.\frac{1}{1-\frac{4}{9}} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

   La probabilité que Camille et Paul intègrent une école la même année est égale à $\frac{1}{5}$.

3. On souhaite calculer $P(Y<X)$. Remarquons que comme $([X=Y],[X<Y],[Y<X])$ est un SCE,

$$P(X=Y)+P(X<Y)+P(Y<X)=1$$

   Par ailleurs, comme X et Y jouent des rôles interchangeables,

$$P(X=Y)+2P(Y<X)=1 \Leftrightarrow P(Y<X)=\frac{1-1/5}{2}=\frac{2}{5}$$

   La probabilité que Camille intègre avant Paul est égale à $\frac{2}{5}$.

4. Tout d'abord, $(X+Y)(\Omega)=[[2;+\infty[[$. Soit $n\in[[2;+\infty[[$.

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P([X=k]\cap[Y=n-k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k).P(Y=n-k) \text{ par indépendance des variables} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{3}).(\frac{2}{3})^{k-1}.(\frac{1}{3}).(\frac{2}{3})^{n-k-1} \\ &= (n-1).\frac{1}{9}.(\frac{2}{3})^{n-2} \end{aligned}$$

5. Pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$P(Y=2k+1)=\frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^{2k}\geq\frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^{2k+1}=P(Y=2k+2)$$

   En sommant pour k variant de 0 à $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=2k+1)\geq\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=2k+2)$$

   et donc

$$P(\text{X est impair})\geq P(\text{X est pair})$$

   Ainsi Camille a plus de chances d'intégrer au bout d'un nombre impair d'années.

Exercice 12 **Loi de $Max(X,Y)$, loi de $Min(X,Y)$, loi de $X+Y$:**
On effectue une succession d'expériences aléatoires, consistant à lancer simultanément deux pièces de monnaie A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque lancer, les résultats des deux pièces sont indépendants.
La probabilité d'obtenir pile avec A vaut $a\in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir pile avec B vaut $\frac{1}{2}$.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre d'expériences qu'il faut réaliser pour que la pièce A (resp. B) donne face pour la première fois.

1. On montre facilement (rédaction type) que $X\hookrightarrow\mathcal{G}(1-a)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{G}(1/2)$. On en déduit les espérances et variances par le cours.

2. Pour tout entier naturel k non nul, l'événement $[X\geq k]$ est réalisé ssi les $k-1$ premiers lancers n'ont donné que des Pile. D'où $P([X\geq k]=a^{k-1}$.

   Dans toute la suite de l'exercice, on prendra $a=\frac{1}{3}$.

   On note Z le nombre d'expériences aléatoires qu'il faut faire pour qu'au moins l'une des deux pièces donne face.

3. (a) $Z=min(X,Y)$

   (b) Pour tout entier naturel k non nul,

$$\begin{aligned} P(Z\geq k) &= P(min(X,Y)\geq k)=P([X\geq k]\cap[Y\geq k]) \\ &= P(X\geq k).P(Y\geq k) \\ &= (\frac{1}{3})^{k-1}.(\frac{1}{2})^{k-1}=(\frac{1}{6})^{k-1} \end{aligned}$$

   (c) Tout d'abord, $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Puis pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$P(Z=k)=P(Z\geq k)-P(Z\geq k+1)=(\frac{1}{6})^{k-1}-(\frac{1}{6})^{k}=(\frac{1}{6})^{k-1}.\frac{5}{6}$$

   Donc $\boxed{Z\hookrightarrow\mathcal{G}(\frac{5}{6})}$

   On note T le nombre d'expériences qu'il faut effectuer pour que l'on ait eu au moins une fois face avec chaque pièce.

4. (a) Cette fois ci $T = Max(X,Y)$!!

   (b) Pour tout entier naturel k non nul,

$$\begin{array}{rcl} P(T<k) & = & P(Max(X,Y)<k) \\ & = & P([X<k]\cap[Y<k]) \\ & = & P(X<k).P(Y<k) \text{ par indépendance de X et Y} \\ & = & (1-P(X\geq k)).(1-P(Y\geq k)) \\ & = & (1-(\dfrac{1}{3})^{k-1}).(1-(\dfrac{1}{2})^{k-1}) \\ & = & 1-(\dfrac{1}{3})^{k-1}-(\dfrac{1}{2})^{k-1}+(\dfrac{1}{6})^{k-1} \end{array}$$

   (c) On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcl} P(T=k) & = & P(T<k+1)-P(T<k) \\ & = & 1-(\dfrac{1}{3})^{k}-(\dfrac{1}{2})^{k}+(\dfrac{1}{6})^{k}-(1-(\dfrac{1}{3})^{k-1}-(\dfrac{1}{2})^{k-1}+(\dfrac{1}{6})^{k-1}) \\ & = & (\dfrac{1}{3})^{k}.(3-1)+(\dfrac{1}{2})^{k}.(2-1)+(\dfrac{1}{6})^{k}.(1-6) \\ & = & -5\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k} \end{array}$$

5. (a) Il s'agit de calculer $P(X = Y)$.

$$\begin{array}{rcl} P(X=Y) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y=k]) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k).P(Y=k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\ & = & \dfrac{1}{3}.\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(\dfrac{1}{6})^{k-1} \\ & = & \dfrac{2}{5} \end{array}$$

   (b) Il s'agit de calculer la probabilité de $[X < Y]$.

$$\begin{array}{rcl} P(X<Y) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k).P(Y>k) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(\dfrac{2}{3}).(\dfrac{1}{3})^{k-1}.(\dfrac{1}{2})^{k} \\ & = & \dfrac{1}{3}.\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(\dfrac{1}{6})^{k-1} = \dfrac{1}{3}.\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}(\dfrac{1}{6})^{i} \\ & = & \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}} \\ & = & \dfrac{2}{5} \end{array}$$

   (c) On souhaite calculer $P(Y < X)$. Comme $([X = Y], [X < Y], [X > Y])$ est un SCE, on obtient alors

$$P(Y<X) = 1-P(X=Y)-P(X<Y) = \frac{1}{5}$$

6. Tout d'abord $(X + Y)(\Omega) = [[2; +\infty[[$. Puis pour tout $k \in [[2; +\infty[[$,

$$\begin{array}{rcl} P(X+Y=k) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} P(X=i).P(Y=k-i) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{2}{3}.(\dfrac{1}{3})^{i-1}.(\dfrac{1}{2}).(\dfrac{1}{2})^{k-i-1} \\ & = & (\dfrac{1}{2})^{k}.2.\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(\dfrac{2}{3})^{i} \\ & = & (\dfrac{1}{2})^{k-1}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{1-(\frac{2}{3})^{k-1}}{1-\frac{2}{3}} \\ & = & (\dfrac{1}{2})^{k-2}.(1-(\dfrac{2}{3})^{k-1}) \end{array}$$