Corrigé du DM n° 5 - pour le 25 novembre 2025

Problème : lancer de jetons

Partie I : Etude de la variable aléatoire X

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que $[X = n]$ soit réalisé, il faut que l'on ait choisi le jeton J_1, puisque le jeton J_2 ne permet pas d'avoir la face 0.
   Par conséquent, $[X = n] = E \cap [X = n]$.
   Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'événement "on obtient 0 au k-ième lancer".
   Tout d'abord, $P(X = 1) = P(E \cap A_1) = P(E) \times P_E(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors

   $$[X = n] = E \cap \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$$

   Par la fomule des probabilités composées,

   $$\begin{aligned} P(X = n) &= P(E) \times P_E(\overline{A_1}) \times \cdots \times P_{E\cap\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A_{n-2}}}(\overline{A}_{n-1}) \times P_{E\cap\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}}(\overline{A}_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \\ &= (\frac{1}{2})^{n+1} \end{aligned}$$

   Cette formule reste vraie si $n = 1$, d'où enfin

   $$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } P([X = n]) = \frac{1}{2^{n+1}}}$$

2. Puisque $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

   $$P(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{n+1} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

   Ce résultat était prévisible : si l'on a tiré le jeton J_1, on aura presque sûrement apparition d'une face "0" au cours d'une suite infinie de lancers. Par contre, si l'on a tiré le jeton J_2, alors il est impossible d'obtenir un "'0". Il est donc logique d'obtenir $P(X = 0) = \frac{1}{2}$.

   <u>Bilan</u> : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

3. Soit $Z = X + 1$. Alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$P(Z = k) = P(X = k - 1) = (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2}.(\frac{1}{2})^{k-1}$$

   Ainsi $Z = X + 1$ suit une loi géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   D'après le cours, $E(Z) = 2$ et $V(Z) = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$.

4. Comme $X = Z - 1$, d'après le cours, X admet également une espérance et une variance, et $E(X) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = 1$, et $V(X) = V(Z - 1) = V(Z) = 2$.

5. Si l'on a choisi le jeton J_1, alors X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ (autrement dit la loi conditionnelle de X sachant que E est réalisé est une loi géométrique).
   D'où le programme suivant :

```
import numpy.random as rd
jeton=rd.randint(1,3) #on choisit le jeton 1 ou le jeton 2
if jeton==1 :
    X=rd.geometric(1/2)
else :
    X=0
```

Partie II : Etude de la variable aléatoire Y

1. On utilise la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(E, \overline{E})$:

   $$P(Y = 1) = P(E) \times P_E(Y = 1) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(Y = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

   Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, alors toujours d'après la formule des probabilités totales :

   $$\begin{aligned} P(Y = n) &= P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i \cap \overline{A_n}) \\ &= P(E) \times P_E((\cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap \overline{A_n}) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}((\cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap \overline{A_n}) \\ &= (\frac{1}{2})^n \times \frac{1}{2} + 0 \\ &= (\frac{1}{2})^{n+1} \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $\boxed{P(Y = n) = (\frac{1}{2})^{n+1}}$

2. Comme $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a alors

   $$\begin{aligned} P(Y = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) \\ &= 1 - \frac{3}{4} - \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{n+1} \\ &= 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{P(Y = 0) = 0}$: l'événement $[Y = 0]$ est négligeable.

3. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} n.P(Y=n)$ est absolument convergente. Etant à termes positifs, il suffit qu'elle soit convergente. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} E(Y) &= P(Y=1)+\sum_{n=2}^{+\infty} nP(Y=n) \\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} \quad \text{attention au terme en } \ n=1 \end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique dérivée, qui converge car $|\frac{1}{2}|<1$.
Donc $E(Y)$ existe.

$$E(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

Donc $\boxed{E(Y)=\frac{3}{2}}$

4. D'après le th. de transfert, $Y(Y-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} k(k-1)P(Y=k)$ est absolument convergente. Etant à termes positifs, il suffit qu'elle soit convergente. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1).(\frac{1}{2})^{k+1} \\ &= (\frac{1}{2})^3.\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1).(\frac{1}{2})^{k-2} \end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique dérivée seconde, qui converge puisque $|\frac{1}{2}|<1$. Par conséquent, $E(Y(Y-1))$ existe bien. Reprenons notre calcul.

$$E(Y(Y-1))=\frac{1}{2^3}.\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}=2$$

Comme $Y^2=Y(Y-1)+Y$, la variable Y^2 est combinaison linéaire de deux variables admettant une espérance, donc Y^2 admet une espérance et

$$E(Y^2)=E(Y(Y-1))+E(Y)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

5. Y admet un moment d'ordre 2, donc une variance et par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{7}{2}-\frac{9}{4}=\frac{5}{4}$$

6.
```
jeton=rd.randint(1,3)
if jeton==1:
    Y=rd.geometric(1/2)
else :
    Y=1
```


Partie III : Etude du min et du max des deux variables X et Y

1. On définit sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ la variable aléatoire $S=Max(X,Y)$ par :
$\forall\omega\in\Omega,\quad S(\omega)=\max(X(\omega),Y(\omega))$.

   (a) On ne peut pas avoir à la fois $X=0$ et $Y=0$. Par contre, il est possible d'obtenir $X=0$ et $Y=1$ par exemple. Et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il est possible d'avoir par exemple $X=k$ et $Y=1$. On en déduit que $S(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

   (b) Les événements $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont incompatibles, puisque l'on ne peut pas avoir deux résultats différents au même lancer !
   Donc $P([X=1]\cap[Y=1])=0$.

   Comme $([X=1]\cap[Y=0])\subset[Y=0]$, on a $P([X=1]\cap[Y=0])\leq P([Y=0])$.
   Mais $P([Y=0])=0$, donc $P([X=1]\cap[Y=0])=0$.

   L'événement $[X=0]$ est réalisé ssi on a choisi le jeton J_2. Mais dans ce cas, $[Y=1]$ est forcément réalisé.
   Donc $P([X=0]\cap[Y=1])=P([X=0])=P(\overline{E})=\frac{1}{2}$.

   Enfin,

$$\begin{aligned} [S=1] &= [Max(X,Y)=1] \\ &= ([X=1]\cap[Y=1])\cup([X=1]\cap[Y=0])\cup([X=0]\cap[Y=1]) \end{aligned}$$

   D'où, les événements étant incompatibles deux à deux,

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P([X=1]\cap[Y=1])+P([X=1]\cap[Y=0])+P([X=0]\cap[Y=1]) \\ &= 0+0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   (c) Si $n\geq 2$ et que $(X=n)$ est réalisé, c'est qu'au lancer numéro $n-1$, on a obtenu la face $n°$ 1. Donc $[Y<n]$ est réalisé. D'où $[X=n]\subset[Y<n]$ et $[X=n]\cap[Y<n]=[X=n]$.
   On montre de même que si $n\geq 2$, $[Y=n]\subset[X<n]$
   et donc $[Y=n]\cap[X<n]=[Y=n]$.
   Alors

$$(S=n)=([X=n]\cap[Y=n])\cup([X=n]\cap[Y<n])\cup([Y=n]\cap[X<n])$$

   Par incompatibilité,

$$P(X=n)=P([X=n]\cap[Y=n])+P([X=n]\cap[Y<n])+P([Y=n]\cap[X<n])$$

   Or l'événement $[X=n]\cap[Y=n]$ est impossible, et d'après ce qui précède, $[X=n]\cap[Y<n]=[X=n]$ et $[Y=n]\cap[X<n]=[Y=n]$. D'où $\boxed{P(S=n)=P(X=n)+P(Y=n)}$

   (d) On en déduit que si $n\geq 2$,

$$P(S=n)=(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{2})^{n+1}=(\frac{1}{2})^n$$

De plus, $P(S=1)=\frac{1}{2}$ donc cette formule reste vraie si $n=1$.

On reconnait la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$: $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})}$
D'après les formules de cours, $E(S)=2$ et $V(S)=\frac{1/2}{(1/2)^2}=2$.

2. On définit sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ la variable aléatoire T par : $\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega)=\min(X(\omega), Y(\omega))$.

   (a) On a $T(\Omega)=\{0,1\}$. En effet, le résultat du premier lancer donne soit un 0, soit un 1. Donc $(X=1)$ ou $(Y=1)$ est réalisé.

   (b) Comme $P(Y=0)=0$, on a aussi $P([X>0]\cap[Y=0])=0$.
   Supposons que $X=0$. Alors nécessairement $Y>0$ est réalisé,
   donc $[X=0]\cap[Y>0]=[X=0]$. On en déduit que

$$P(T=0)=P([X=0]\cap[Y=0])+P([X>0]\cap[Y=0])+P([X=0]\cap[Y>0])=0+0+P([X=0])=\frac{1}{2}$$

   (c) Ainsi $P(T=0)=\frac{1}{2}$, $P(T=1)=\frac{1}{2}$: la variable T suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$: $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})}$

   D'après le cours, $E(T)=\frac{1}{2}$ et $V(T)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Partie IV : Etude du nombre de faces numéro 1

Dans cette question, on considère un entier naturel non nul n fixé, et on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de faces portant le numéro 1 que l'on obtient au cours de n lancers.

1. $Z_n(\Omega)=[[0,n]]$.

2. Dans cette question uniquement, on suppose que le jeton J_1 a été choisi.
   On reconnaît une situation type :

   - Epreuve de Bernoulli $\mathcal{E}$: on lance le jeton J_1.
   - Succès : on obtient le numéro 1, de probabilité $\frac{1}{2}$.
   - Z_n est égale au nombre de succès lorsque l'on répète n fois l'épreuve $\mathcal{E}$ de manière identique et indépendante.
   Ainsi $\boxed{Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})}$

3. Pour tout $k \in [[0,n]]$, on a donc

$$P_E(Z_n=k)=\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^n$$

4. Soit $k \in [[0,n]]$. D'après la FPT dans le SCE $(E, \overline{E})$:

$$P(Z_n=k)=P(E)\times P_E(Z_n=k)+P(\overline{E}).P_{\overline{E}}(Z_n=k)$$

   On distingue deux cas :

   - 1er cas : si $k<n$, alors $P_{\overline{E}}(Z_n=k)=0$. En effet, si le jeton J_2 a été choisi, alors au cours des n lancers, on obtient exactement n fois la face 1. On en déduit alors que
   $$P(Z_n=k)=\frac{1}{2}.\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^n=\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^{n+1}$$
   - 2ème cas : si $k=n$ alors $P_{\overline{E}}(Z_n=n)=1$: on est certains d'obtenir n fois la face 1 en lancant n fois le jeton J_2.
   $$P(Z_n=n)=\frac{1}{2}.\binom{n}{n}.(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}$$

Bilan :

$$P([Z_n=k])=\begin{cases}\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^{n+1} & \text{si } k<n\\ (\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2} & \text{si } k=n\end{cases}$$

Vérifions que l'on a bien $\sum_{k\in Z_n(\Omega)} P([Z_n=k])=1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(Z_n=k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}\\ &= (\frac{1}{2})^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}+(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}\\ &= (\frac{1}{2})^{n+1}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-1)+(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}\\ &= (\frac{1}{2})^{n+1}.(2^n-1)+(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

5. Z_n est une VAR finie, donc son espérance existe.

$$\begin{aligned}E(Z_n) &= \sum_{k=0}^{n} k.P(Z_n=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k.\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^{n+1}+n.((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}) \quad \text{en sortant le terme en } k=n\\ &= (\frac{1}{2})^{n+1}.\sum_{k=1}^{n-1} k.\frac{n}{k}.\binom{n-1}{k-1}+n.((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2})\\ &= (\frac{1}{2})^{n+1}.n.\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}+n.((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2})\\ &= (\frac{1}{2})^{n+1}.n.\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}+n.((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2})\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E(Z_n) &= (\frac{1}{2})^{n+1}.n.(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} - 1) + n.((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{1}{2})^{n+1}.n.(2^{n-1}-1) + n.((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{4}.n - n.(\frac{1}{2})^{n+1} + n.(\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{2}.n \\
&= \frac{3}{4}.n
\end{aligned}$$

Ceci est assez logique : si l'on joue avec le jeton J_1, le nombre de faces 1 est en moyenne de $\frac{n}{2}$ et si l'on joue avec le jeton J_2, le nombre de faces 1 est égal à n.

Remarque : ce calcul est plus rapide avec **la formule de l'espérance totale** : cf fin du chapitre.

En effet, la formule de l'espérance totale dans le SCE $(E,\overline{E})$ nous dit que

$$E(Z_n) = P(E)\times E(Z_n/E) + P(\overline{E}).E(Z_n/\overline{E}) = \frac{1}{2}.\frac{n}{2} + \frac{1}{2}.n = \frac{3}{4}n$$

6. Comme Z_n est une variable finie, Z_n admet un moment d'ordre 2 et une variance. Calculons d'abord l'espérance de $Z_n(Z_n-1)$. Par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(Z_n(Z_n-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(Z_n=k) \\
&= (\frac{1}{2})^{n+1}\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1).\binom{n}{k} + n(n-1)((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{1}{2})^{n+1}\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1).\frac{n}{k}.\frac{n-1}{k-1}.\binom{n-2}{k-2} + n(n-1)((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{1}{2})^{n+1}.n.(n-1).\sum_{i=0}^{n-3}\binom{n-2}{i} + n(n-1)((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{1}{2})^{n+1}.n.(n-1).(2^{n-2}-1) + n(n-1)((\frac{1}{2})^{n+1}+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{8}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) \\
&= \frac{5}{8}n(n-1)
\end{aligned}$$

Puis

$$E(Z_n^2) = E(Z_n(Z_n-1)) + E(Z_n) = \frac{5}{8}n(n-1) + \frac{3}{4}n$$

et par la formule de Koenig-Huygens,

$$V(Z_n) = E(Z_n^2) - (E(Z_n))^2 = \frac{5}{8}n(n-1) + \frac{3}{4}n - \frac{9}{16}n^2$$

D'où $\boxed{V(Z_n) = \frac{n^2+2n}{16}}$

7.
```
n=int(input("Entrer n:"))
jeton=rd.randint(1,3)
if jeton==1 :
    Z=rd.binom(n,1/2)
else :
    Z=n
```