Corrigé du DM n° 6

Exercice 1 : Edhec 2018

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, on a $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([[0,n]])}$.

   (b) Posons $Y_n = X_n+1$. Alors $Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}([[1,n+1]])$ donc on peut utiliser les formules du cours: $E(Y_n) = \frac{(n+1)+1}{2} = \frac{n+2}{2}$ et $V(Y_n) = \frac{(n+1)^2-1}{12} = \frac{n^2+2n}{12}$. Or par linéarité de l'espérance on a

$$E(X_n) = E(Y_n) - 1 = \frac{n+2}{2} - 1 = \frac{n}{2}$$

   et d'après une propriété de la variance:

$$V(X_n) = V(Y_n) = \frac{n^2+2n}{12}.$$

2. (a) On stocke les différentes abscisses dans une matrice ce qui facilitera la question suivante:

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=int(input("Saisir n: "))
X=np.zeros(n)
print(0, "position initiale :")
for k in range(0,n):
    X[k]=rd.randint(0,k+2)
print(X)
```

   (b) Il suffit d'ajouter la ligne suivante à la fin du programme précédent:

```
print(np.max(X))
```

3. (a) On ne peut pas affirmer que Y suit la loi géométrique car il n'y a pas de répétition d'une *même* épreuve de Bernoulli puisque les possibilités de déplacements changent à chaque instant.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(Y = n)$ est réalisé si et seulement si $X_n = 0$ et aucune des variables X_k (pour $k \in [[1, n-1]]$) ne prend la valeur 0. On a donc

$$\boxed{(Y = n) = (X_1 \neq 0) \cap (X_2 \neq 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} \neq 0) \cap (X_n = 0).}$$

   (c) Notons d'abord que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. L'inclusion $\subset$ est évidente car il faut au moins un déplacement pour revenir pour la première fois à l'origine. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le mobile peut avoir la trajectoire suivante: rester sur l'abscisse 1 pendant $n-1$ instants puis revenir en 0; dans ce cas, on a $Y = n$ et donc $n \in Y(\Omega)$. Cela prouve l'inclusion $\supset$.
   En conclusion, $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$

   De plus, les variables X_k étant mutuellement indépendantes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= P\left((X_1 \neq 0) \cap (X_2 \neq 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} \neq 0) \cap (X_n = 0)\right) \\ &= P(X_1 \neq 0) \times P(X_2 \neq 0) \times \cdots \times P(X_{n-1} \neq 0) \times P(X_n = 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la loi de } Y \text{ est définie par: } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = \tfrac{1}{n(n+1)}.}$

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

   On aura alors une somme télescopique : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} P(Y = n) = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

   donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1.}$

   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|nP(Y = n)| = n \times \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

   Ainsi, $|nP(Y = n)|$ est le terme général de la série harmonique qui diverge. Il en résulte que $\boxed{Y \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

4. <u>Les questions suivantes sont hyper-classiques !!!</u>

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant entre k et $k+1$, on en déduit aisément que

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

   (b) Soit $j \geq 2$. En sommant ci-dessus entre 1 et $j-1$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{j-1} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$$

   par télescopage. D'où d'une part, $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \geq \ln(j)$ et d'autre part,

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(j) \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k} \leq \ln(j) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$$

   <u>Bilan :</u> $\boxed{\forall j \geq 2,\ \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}}$

(c) On divise par $\ln(j)$ dans la relation ci-dessus ($\ln(j) \neq 0$ car $j \geq 2$) :

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(j)} - \frac{1}{j\ln(j)}$$

d'où par encadrement $\lim_{j\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}}{\ln(j)} = 1$.

Bilan : $\boxed{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \sim_{j\to+\infty} \ln(j)}$

5. (a) Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et soit i un entier $\geqslant j$. Le deuxième retour à l'origine ne peut pas avoir lieu avant le premier, donc $\boxed{P_{(Y=i)}(Z=j) = 0.}$

(b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et soit $i \in [[0, j-1]]$. Sachant que $(Y = i)$ est réalisé, le deuxième retour à l'origine a lieu à l'instant j si et seulement si l'événement suivant est réalisé:

$$(X_{i+1} \neq 0) \cap (X_{i+2} \neq 0) \cap \cdots \cap (X_{j-1} \neq 0) \cap (X_j = 0).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
P_{(Y=i)}(Z=j) &= P\left((X_{i+1} \neq 0) \cap (X_{i+2} \neq 0) \cap \cdots \cap (X_{j-1} \neq 0) \cap (X_j = 0)\right) \\
&= P(X_{i+1} \neq 0) \times P(X_{i+2} \neq 0) \times \cdots \times P(X_{j-1} \neq 0) \times P(X_j = 0) \\
&\quad \text{par indépendance des } X_k \\
&= \frac{i+1}{i+2} \times \frac{i+2}{i+3} \times \cdots \times \frac{j-1}{j} \times \frac{1}{j+1} \\
&= \frac{i+1}{j(j+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P_{(Y=i)}(Z=j) = \frac{i+1}{j(j+1)}.}$

(c) Soit $j \geqslant 2$. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ les événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements. De plus on a $P(Y = i) = \frac{1}{i(i+1)} \neq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ donc on peut appliquer la formule des probabilités totales, ce qui donne:

$$P(Z=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_{(Y=i)}(Z=j)P(Y=i)$$

et donc, en utilisant les deux questions précédentes,

$$P(Z=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i+1}{j(j+1)} \times \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}.$$

Ainsi, $\boxed{P(Z=j) = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}.}$

(d) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|jP(Z=j)| = j \times \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} = \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(j)}{j}.$$

La série de terme général $\frac{\ln(j)}{j}$ est divergente donc, par le critère d'équivalence (notons que les termes généraux sont positifs) on en déduit que la série de terme général $|jP(Z = j)|$ diverge donc $\boxed{Z \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

6. On propose le programme suivant:

```
n=0# nombre de déplacements
r=0# nombre de retours à l'origine
while r<2 :
n=n+1
X=rd.randint(0,n+1)
print(X)
if X==0:
        r=r+1
        if r==1 :
              y=n
z=n
print(y)
print(z)
```

Exercice 2 - Etude de variables à densité

Partie 1: question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(b) $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.
Notons pour tout $x \in]0; +\infty[$, $h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ par composition et somme et pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}.\frac{1}{1+(1/x)^2} = 0$$

Donc h est constante sur $]0; +\infty[$. Comme $h(1) = \frac{\pi}{2}$, on a bien le résultat souhaité.

Bilan : $\boxed{\forall x > 0,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} \to_{x\to 0} \text{Arctan}'(0) = 1$$

donc $\boxed{\text{Arctan}(x) \sim_{x\to 0} x}$
On peut aussi utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

2. (a) Cf exercice sur la loi de Cauchy.

(b) Idem. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}$$

3. (a) On considère la fonction g telle que

$$\forall x \in R, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est positive, continue sur $\mathbb{R}^*$.
Etudions $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}dx$. Cette intégrale est doublement impropre, en 0 et en $+\infty$. Soit ϵ et A deux réels avec $0 < \epsilon < A$.

$$\begin{aligned} I_{\epsilon,A} &= \int_\epsilon^A \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}dx \\ &= [e^{-\frac{1}{x}}]_\epsilon^A \\ &= e^{-\frac{1}{A}} - e^{-\frac{1}{\epsilon}} \\ &\to_{\epsilon\to 0, A\to+\infty} 1 \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ est convergente et vaut 1.

Bilan : g est une densité de probabilité.

Soit T une variable aléatoire de densité g.

(b) Déterminons la fonction de répartition G de T.

$T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \le 0$, $G(x) = P(T \le x) = 0$.
Soit $x > 0$.

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = \int_0^x \frac{1}{t^2}\, e^{-\frac{1}{t}}dt$$

Cette intégrale est encore impropre en 0. Soit ϵ tel que $0 < \epsilon < x$. Alors

$$\int_\epsilon^x \frac{1}{t^2}\, e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{\epsilon}} \to_{\epsilon\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$$

donc $G(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Bilan : $\boxed{\text{la fonction de répartition de } T \text{ est : } G : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \ge 0 \end{cases}}$

Partie 2: étude d'une suite de variables aléatoires associée à X.

1. (a) $M_n(\Omega) = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(Max(X_1, \cdots, X_n) \le x) \\ &= P([X_1 \le x] \cap \cdots \cap [X_n \le x]) \\ &= P(X_1 \le x). \cdots .P(X_n \le x) \text{ par indépendance mutuelle des variables} \\ &= (F(x))^n \text{ car toutes les variables suivent la même loi} \\ &= (\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2})^n \end{aligned}$$

(b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^\star$, $Y_n = \dfrac{\pi}{n} M_n$. Notons G_n la fonction de répartition de Y_n. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = P(\frac{\pi}{n}M_n \le x) = P(M_n \le \frac{n}{\pi}x) = (\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{nx}{\pi}) + \frac{1}{2})^n$$

2. (a) D'où

$$G_n(x) = \exp(n.\ln(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{nx}{\pi}) + \frac{1}{2}))$$

Si $x < 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{nx}{\pi}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}.(-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} = 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{nx}{\pi}) + \frac{1}{2})) = -\infty$.
Par produit puis composition, $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$.
Si $x = 0$ alors

$$G_n(0) = (\frac{1}{2})^n \to_{n\to+\infty} 0$$

(b) On sait que pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{nx}{\pi}) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(\frac{\pi}{nx})) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{\pi}{nx})$$

et on en déduit que

$$\forall x > 0,\quad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

(c) D'où pour tout $x > 0$,

$$G_n(x) = \exp(n.\ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{\pi}{nx})\right))$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right) = 0$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{\pi}{nx})\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)$$

D'après le 1.(c), comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{nx} = 0$, on a alors

$$-\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\pi}.\frac{\pi}{nx} = -\frac{1}{nx}$$

puis

$$n.\ln\left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\frac{\pi}{nx})\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{1}{x}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

(d) Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases} = G(x)}$

Remarque : ceci signifie que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers T (cf en fin d'année le chapitre sur les convergences de variables aléatoires).