# DS n°4 - lundi 9 décembre 2024

Dans les programmes Python, on suppose que l'on a déjà fait les imports :
`import numpy as np` et `import numpy.random as rd`

## Exercice 1

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{|x|}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. (a) Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et étudier la parité de $f$.
   (b) Étudier la dérivabilité de $f$ en 0 .
2. (a) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[0, +\infty[$ en précisant les limites aux bornes de $[0, +\infty[$ et la valeur des extrema.
   (b) Donner l'allure de la courbe représentative de $f$.
   (c) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

   Dans la suite, on note $X$ une variable aléatoire admettant $f$ comme densité.
3. (a) Montrer que $X$ admet une espérance.
   (b) Donner alors (sans faire de calcul) la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire $X$.
   (c) On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$. Montrer que:

   $$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   (d) Résoudre l'équation d'inconnue $x$ suivante : $F_X(x) = \frac{3}{4}$. Que représente la solution trouvée pour la variable aléatoire $X$ ?
4. On pose $T = |X|$ et on admet que $T$ est une variable aléatoire. On note $F_T$ la fonction de répartition de $T$.
   (a) Déterminer $F_T(x)$ pour tout $x$ réel puis justifier que $T$ est une variable à densité.
   (b) Donner une densité $f_T$ de la variable aléatoire $T$.
   (c) Montrer que $T$ admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   (d) Reconnaître la loi de $T^2$. En déduire sans calcul l'existence et la valeur de $\mathbb{E}\left(T^2\right)$.
   (e) Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X)$ et de $\mathbb{V}(T)$.

**Exercice 2**

1. Soit $x \in ]0;+\infty[$. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x.e^t}dt$ converge.

   On note alors $f : ]0;+\infty[ \to \mathbb{R}$ l'application définie sur $]0;+\infty[$ par

   $$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x.e^t}dt$$

2. (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in ]0;+\infty[^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{xy}.|x-y|$.

   (b) En déduire que $f$ est continue sur $]0;+\infty[$.

3. (a) Déterminer un réel $c > 0$ tel que $\forall x \in ]0;+\infty[$,

   $$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt - f(x) \leq \frac{c}{x^2}$$

   (b) En déduire que $f(x) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$.

4. (a) Soit $x \in ]0;+\infty[$. Prouver que $L = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{e^{-t}+x}dt$ converge et donner sa valeur.

   (b) En déduire que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

5. (a) Soit $x \in ]0;+\infty[$. Justifier, à l'aide du changement de variables $u = x.e^t$ que

   $$f(x) = -\ln(x).\ln(1+\frac{1}{x}) + I(x)$$

   où $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u.(1+u)}du.$

   (b) Prouver alors que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$.

6. Justifier que $f$ est strictement monotone.

7. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!\ x_n \in ]0;+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x_n.e^t}dt = \frac{1}{n}$

   (b) Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone. Justifier que $x_n \sim_{n\to+\infty} n$.

**Problème : greffe de rosiers**

Toutes les variables aléatoires considérées sont relatives au même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans ce problème, $p$ est un réel appartenant à $]0,1[$; on note $q = 1-p$ et on a $(p,q) \in ]0,1[^2$.
$R$ est un entier naturel non nul.

L'objet du problème est la modélisation d'un procédé de greffes de rosiers réalisé dans un centre de recherche horticole. Lorsqu'une greffe est réalisée, on sait au bout d'une semaine si elle a pris ou non. On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne est $p$.

On souhaite greffer $R$ rosiers. Pour cela, on pratique une greffe sur chacun d'entre eux et chaque semaine, si la greffe ne prend pas, on recommence jusqu'à ce qu'elle prenne effectivement. On suppose que toutes ces expériences sont mutuellement indépendantes et que les différents rosiers réagissent aux différentes greffes indépendamment les uns des autres.

Pour tout $i \in [[1, R]]$, on note $X_i$ la variable aléatoire égale au nombre de greffes successives nécessaires pour que cela prenne sur le rosier numéro $i$.

Les variables aléatoires $X_i$ où $i \in [[1, R]]$ sont mutuellement indépendantes.
On note $G_R$ la variable aléatoire, égale au nombre total de greffes nécessaires pour que tous les rosiers aient pris.
On note $T_R = Max(X_1, \cdots, X_R)$ la variable aléatoire égale au nombre de semaines nécessaires à la prise des greffes sur les $R$ rosiers.

**La Partie III est indépendante des Parties I et II**

## Préliminaire

1. Justifier que : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a + 1 \leq b$, $\binom{b}{a} + \binom{b}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}$.
2. En déduire que : $\forall (a, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a \leq m$, $\displaystyle\sum_{k=a}^{m} \binom{k}{a} = \binom{m+1}{a+1}$.

## Partie I : loi des variables $G_R$ et $T_R$

3. Soit $i \in [[1, R]]$ fixé. Justifier que $X_i$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.
   Donner l'espérance et la variance de $X_i$.
4. (a) Justifier que $G_R = \sum_{i=1}^{R} X_i$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de $G_R$.
   (c) Ecrire une fonction Python intitulée `def G(R,p):` qui simule la variable $G_R$.
5. Déterminer la loi de $G_2$.
6. Préciser $G_R(\Omega)$ et justifier par récurrence sur $R$ que :

$$\forall k \in G_R(\Omega), \quad P(G_R = k) = \binom{k-1}{R-1} . p^R . (1-p)^{k-R}$$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $P(T_R \leq n) = (1 - q^n)^R$.
   (b) Déterminer alors la loi de $T_R$.
   (c) Ecrire une fonction Python intitulée `def T(R,p):` qui simule la variable $T_R$.

## Partie II : étude de l'espérance de $T_R$

8. Prouver que $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N} P(T_R > n) = \sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R = n) + (N+1).P(T_R > N+1)$$

9. En utilisant le I.7.a), justifier que $P(T_R > n) \sim_{n \to +\infty} R.q^n$.
10. En déduire que $T_R$ admet une espérance et que $E(T_R) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - (1 - q^n)^R)$.

11. On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 1-(1-q^x)^R = 1-\big(1-\exp(x\ln(q))\big)^R$$

   (a) Prouver que $f$ est décroissante sur $[0;+\infty[$.

   (b) Justifier que $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} q^x.(1-q^x)^k$.

   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} q^x.(1-q^x)^k dx$.
   A l'aide du changement de variable $u = q^x = e^{x\ln(q)}$, montrer que $I_k$ est convergente et la calculer.

   (d) Prouver alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j}$.

12. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(T_R > n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \ \leq P(T_R > n)$.

   (b) Prouver alors que

$$-\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j} \leq E(T_R) \leq -\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j}+1$$

13. On rappelle que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j} \sim_{R\to+\infty} \ln(R)$.
Déterminer alors un équivalent de $E(T_R)$ lorsque $R \to +\infty$.

## Partie III : évolution du processus sur plusieurs semaines

On considère la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $Y_0 = 0$ et où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n$ est la variable aléatoire égale au nombre de rosiers dont la greffe a déjà pris à l'issue de la $n$-ième semaine.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Z_{n+1} = Y_{n+1} - Y_n$.

14. Que représente la variable aléatoire $Z_{n+1}$ ?

15. Reconnaître la loi de $Y_1$. Donner son espérance et sa variance.

16. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in [[0,R]]$.
Déterminer la loi de $Z_{n+1}$ conditionnelle à $[Y_n = m]$ et l'espérance conditionnelle $E(Z_{n+1}/[Y_n = m])$.

17. En déduire que $E(Z_{n+1}) = pR - pE(Y_n)$. Donner alors une relation entre $E(Y_{n+1})$ et $E(Y_n)$.
Expliciter finalement $E(Y_n)$ en fonction de $R$, $n$ et $p$.

18. Ecrire un script en Python simulant les variables $Y_1$, $Z_2$ et $Y_2$ et affichant leurs valeurs.

19. (a) En utilisant $Y_1$ et $Z_2$, justifier que : $\forall k \in [[0,R]]$,

$$P(Y_2 = k) = \sum_{m=0}^{k}\binom{R}{m}.\binom{R-m}{k-m}.p^k.q^{2R-m-k}$$

   (b) En déduire que $Y_2$ suit une loi binômiale, dont on précisera les paramètres en fonction de $p$ et de $R$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Plus généralement déterminer sans calcul la loi de $Y_n$ et donner $E(Y_n)$.