ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques Approfondies 2025/26

Programme de colle - **Semaine 10**
du 8 au 12 décembre 2025

`Informatique : programmation en langage Python`

Notamment : **simulation des variables discrètes usuelles en Python** (loi uniforme discrète, loi binômiale, géométrique, de Poisson, générateur `rd.random()`).

Chapitre 7 - Variables à densité (tout)

1. Fonction de répartition
   - Définition et propriétés : limites, croissante, continuité à droite en tout point.
   - Propriété supplémentaire : $P(X=a) = F_X(a) - \lim_{t\to a^-} F_X(t)$.
   - F est une fonction de répartition d'une certaine VAR X si
     - F est fonction continue à droite en tout réel.
     - F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
     - $\lim_{t\to-\infty}(F_X(t)) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty}(F_X(t)) = 1$
2. Variable à densité
   - X est **une variable aléatoire à densité** lorsque sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus E$ où E est un ensemble fini ("de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points").
   - Une fonction f est une densité de probabilité si f positive, f continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
   - Si X est une variable à densité, on obtient <u>une</u> densité de X en dérivant F_X partout où c'est possible et en donnant une valeur (positive) pour les autres points.
   - Si X a pour densité f alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
   - Points critiques d'une variable à densité : points où F n'est pas dérivable, où f n'est pas continue.
   - Univers image $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) > 0\}$
   - $P(X=a) = 0$, $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = ... = F_X(b) - F_X(a)$.
3. Transformées d'une variable à densité
   - Transformation affine d'une variable à densité
   - Méthodes pour loi de X^2, de $|X|$, de $\lfloor X \rfloor$.

4. Espérance d'une variable à densité
   - Définition, propriétés.
   - Théorème de transfert pour les variables à densité.
5. Variance d'une variable à densité
   - Existence et calcul de $E(X^2)$.
   - Définition de la variance.
   - Formule de Koenig-Huygens.
   - Propriétés de la variance.
   - Ecart-type.
6. Lois usuelles
   - Loi uniforme sur $[a,b]$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Stabilité par transformation affine : si X suit une loi uniforme et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi uniforme, que l'on peut préciser en déterminant $Y(\Omega)$.
   - Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Attention paramètre inversé dans la simulation Scilab.
   Stabilité : si $\alpha > 0$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ (savoir démontrer une implication *).
   Variante qui revient au même $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$
   Loi d'un processus sans mémoire : comprendre.
   - Loi normale
     - Rappel : intégrale de Gauss.
     - Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition Φ, espérance, variance. Propriétés de Φ : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$ (sert tout le temps)
     - Loi normale de paramètres m et σ^2 : densité, fonction de répartition, espérance, variance.
     - Stabilité par transformation affine : si X suit une certaine loi normale, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi normale. On déterminera ses paramètres en calculant $E(Y)$ et $V(Y)$.
     - Centrage-réduction : si $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$ alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
     - Table des valeurs de la fonction Φ : à savoir utiliser.

- Loi petit gamma
  - Rappels sur la fonction Gamma.
  - Densité, espérance (*), variance (*) : calculs rapides grâce à la fonction Gamma.
  - On remarque que $X \hookrightarrow \gamma(1) \Leftrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- **Produit de convolution pour les variables à densité**
  A utiliser pour trouver la loi de $X+Y$ où X et Y sont à densité et indépendantes.

  Théorème
  Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ de densités respectives f_X et f_Y.
  On note $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt$
  - **Version1** : **si la fonction** h **est définie, continue sur** $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points alors h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt$$
  - **Version 2**
  Si f_X **ou** f_Y **est bornée sur** $\mathbb{R}$ alors la fonction h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)dt$$

  On regardera donc d'abord si l'une des deux densités est bornée **pour pouvoir appliquer la version 2**, et sinon à défaut on se ramène à la version 1.

Exercice à savoir refaire : Soient λ et μ des réels strictement positifs tels que $\lambda \neq \mu$.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega), \mathcal{T}, P)$ suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.
On note $Z = X + Y$.
Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z

7. Stabilité pour la somme : loi gamma et loi normale

   (a) Si $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ (où $\nu_1 \in]0, +\infty[$ et $\nu_2 \in]0, +\infty[$) et si X_1 et X_2 sont des variables **indépendantes**
   alors $\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)}$

   (b) Si $\forall k \in [[1, m]]$, $X_k \hookrightarrow \gamma(\nu_k)$ et si les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont **mutuellement indépendantes**
   alors $\boxed{X_1 + X_2 + \ldots + X_m \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)}$

   (c) Conséquence pour une somme de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

   (d) Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes alors
   $$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

   (e) Si $\forall k \in [[1, r]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ et si les r variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont **mutuellement indépendantes**, alors
   $$X_1 + X_2 + \ldots + X_r \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \cdots + m_r, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2)$$

8. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

   (a) Inégalité de Markov.
   Démonstration guidée sous forme d'exercice (*) à savoir refaire :
   Soit X une variable aléatoire (à densité ou discrète), admettant une espérance, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
   Soit a un réel strictement positif. On note A l'événement $A = [X \geq a]$ On note $\mathbb{1}_A$ la variable indicatrice de l'événement A.
   i. Rappeler la définition de la variable $\mathbb{1}_A$.
   ii. Calculer l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.
   iii. Montrer que $a \times \mathbb{1}_A \leq X$. En déduire l'inégalité de Markov.

   (b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).
   Preuve en appliquant Markov à $Y = (X - E(X))^2$.

   (c) Exercice d'application à savoir refaire
   Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
   Montrer que $\forall \epsilon > 0, P\left(|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.
   En déduire que $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$

.

(*) : **preuve exigible**