Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire

Objectif : introduire dans les espaces vectoriels les notions d'orthogonalité et de longueur

I. Généralités

I.1) Définition

Définition I.1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire sur** E toute application φ définie sur $E \times E$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. φ est une **forme bilinéaire sur** E, c'est-à-dire :
   (a) φ est à valeur dans $\mathbb{R}$,
   (b) φ est linéaire par rapport à la première variable :
   $$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi(x_1 + \alpha x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \alpha\varphi(x_2, y)$$
   (c) φ est linéaire par rapport à la seconde variable :
   $$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi(x, y_1 + \alpha y_2) = \varphi(x, y_1) + \alpha\varphi(x, y_2)$$
2. φ est **symétrique**, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(\ x, y) = \varphi(y, x)$
3. φ est **définie positive**, c'est-à-dire :
   ⋆ $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$ (φ positive),
   ⋆ $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$ (φ définie).

On dit donc que φ **est un produit scalaire sur** E lorsque l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire sur E, symétrique, définie positive.

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

Remarque
On note en général le produit scalaire entre les vecteurs x et y, $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle$.
Autres notations possibles : $\varphi(x, y) = \langle x|y\rangle = (x|y) = (x, y)$.

Remarque
- Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\varphi(-x, x) < 0$: φ peut prendre des valeurs négatives.
- Sur un même espace vectoriel E, on peut définir plusieurs produits scalaires.

Définition I.2
Définition équivalente
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. φ est un produit scalaire sur E si et seulement si

1. φ est une application de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$,
2. φ est **symétrique**, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,
3. φ est **linéaire par rapport à la première variable**, c'est-à-dire
   $$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi(x_1 + \alpha x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \alpha\varphi(x_2, y)$$
4. φ est **définie positive**, c'est-à-dire :
   ⋆ $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$,
   ⋆ $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

I.2) Produits scalaires canoniques

Proposition I.1
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$
On note

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) & \longmapsto & \langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple
1. Dans $\mathbb{R}^2$, $\langle (1, -1), (2, -3)\rangle =$
2. Dans $\mathbb{R}^n$, $\langle (1, 1, \cdots, 1), (1, 1, \cdots, 1)\rangle =$
3. Dans $\mathbb{R}^n$, $\langle (1, 2, \cdots, n), (1, 1, \cdots, 1)\rangle =$

Remarque
On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, si $i \neq j$ on a $\langle e_i, e_j\rangle =$

Pour tout $i \in [[1, n]]$, on a $\langle e_i, e_i\rangle =$

Proposition I.2
Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
On note $\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad \langle X, Y\rangle = {}^t X.Y$.

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot\rangle :\ \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \langle X, Y\rangle = {}^t X.Y \end{array}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire appelé le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Exemple
Si $n=3$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle =$

Remarque
On note $(E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, si $i \neq j$, $\langle E_i, E_j \rangle =$

Pour tout $i \in [[1,n]]$, $\langle E_i, E_i \rangle =$

On note $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\langle V, V \rangle =$

I.3) Quelques produits scalaires classiques

__Attention :__ les produits scalaires que nous allons étudier font l'objet de nombreux problèmes mais ne figurent pas dans le programme. Il faut donc **savoir refaire les preuves** (très souvent demandé en concours !).

Exercice 1
Produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b])$
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
On note

$$\forall (f,g) \in \left(\mathscr{C}^0([a,b])\right)^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que l'application $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a,b])$.
2. Sur $\mathscr{C}^0([0,1])$, f est la fonction $x \longmapsto x$ et g est la fonction $x \longmapsto e^x$. Calculer $\langle f, g \rangle$.
3. Sur $\mathscr{C}^0([-1,1])$, f est la fonction $x \longmapsto x$ et g est la fonction $x \longmapsto x^2$. Calculer $\langle f, g \rangle$.

Exercice 2
Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
On note

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)dt \end{array}$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3
Un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
On considère

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \longmapsto & \langle A, B \rangle = tr\left({}^tA \times B\right) \end{array}$$

Montrer que la fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4
Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

1. Montrer que, pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ est convergente.
2. On note
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$
Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

I.4) Bilinéarité des produits scalaires

Exercice 5
On considère un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ, que l'on note $\langle ., . \rangle$.

1. Soient x et y des vecteurs de E et α un réel. Calculer $\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle$ en fonction de $\langle x, y \rangle$ et α
2. Soient $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$ et $(v_1, v_2, v_3) \in E^3$.
Développer $\left\langle \sum_{i=1}^3 a_i u_i, \sum_{i=1}^3 b_i v_i \right\rangle$.

Proposition I.3
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Soit φ un produit scalaire sur E que l'on note $\langle ., . \rangle$.

1. $\forall u \in E, \quad \langle u, 0_E \rangle = \langle 0_E, u \rangle = 0$.
2. $\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant q} \in \mathbb{R}^q$
Soit p vecteurs $u_1, \cdots, u_p$ de E et q vecteurs $v_1, \cdots, v_q$ de E,
$$\left\langle \sum_{i=1}^p a_i u_i, \sum_{i=1}^q b_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle.$$
On développe comme un produit !! Il faut différencier les variables.
3. $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$.
Soit p vecteurs $u_1, \cdots, u_p$ de E.
$$\left\langle \sum_{i=1}^p a_i u_i, \sum_{i=1}^p a_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \langle u_i, u_j \rangle.$$
Attention à différencier les variables : prendre deux indices de sommes différents.

I.5) Orthogonalité entre deux vecteurs

Définition I.3
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
On dit que les vecteurs u et v de E **sont orthogonaux** lorsque $\langle u, v \rangle = 0$.
On peut noter $u \perp v$.

Remarque
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E.
Si u est un vecteur orthogonal à tout vecteur de E alors $u = 0_E$.

Exemple
1. Les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont des vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^2$ car....
2. Si h est une fonction paire et j une fonction impaire de $\mathscr{C}^0([-1,1])$, alors h et j sont orthogonales pour le produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

I.6) Norme associée à un produit scalaire

Définition I.4
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

1. On appelle **norme euclidienne associée au produit scalaire** $\langle\ ,\ \rangle$, l'application N définie sur E par :
$$\forall u \in E,\ N(u) = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$
2. On dit que u est un **vecteur normé (ou unitaire)** si et seulement si $N(u) = 1$.

On notera $||y|| = N(y)$ la norme du vecteur y.

Remarque
Pourquoi l'application N est-elle bien définie ?

Proposition I.4
Normes associées aux produits scalaires canoniques

1. La norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est :
$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$
2. La norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est :
$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Exemple
1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, $\|(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)\| =$
2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, $\|(1, -2, 4)\| =$
3. Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, on considère $\forall i \in [[1, n]]$, E_i la matrice colonne dont les coordonnées sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ coordonnée qui vaut 1.
$\|E_i\| =$
Toujours dans le même espace euclidien, $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \right\| = \dots$

Exemple
1. On note $\forall (f, g) \in \left(\mathscr{C}^0([a, b])\right)^2 \quad \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$
La norme associée au produit scalaire φ sur $\mathscr{C}^0([a, b])$ est définie par :
$$\forall f \in \mathscr{C}^0([a, b]) \qquad \|f\| =$$
Soit $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto e^x$.
$\|f\| =$
$\|g\| =$
$\|h\| =$
2. La norme associée au produit scalaire $(A, B) \longmapsto tr({}^tAB)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, \qquad \|A\| = \dots$$
$\|I_n\| =$
Soit J la matrice pleine de 1. $\quad \|J\| =$

Proposition I.5
Propriétés d'une norme
Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire défini sur un espace vectoriel E et soit $\|.\|$ la norme associée.
Alors

- $\forall u \in E, \|u\| \geqslant 0$.
- $\forall u \in E,\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$.
- $\forall u \in E$, si u n'est pas le vecteur nul alors $\|u\| > 0$.
- $\forall u \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \|\alpha u\| = |\alpha|\ \|u\|$.

Proposition I.6
Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire défini sur un espace vectoriel E et soit $\|.\|$ la norme associée.
$$\forall (u, v) \in E^2,\ \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

Théorème I.1
Théorème de Pythagore
Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire défini sur un espace vectoriel E et soit $\|.\|$ la norme associée.
Soit u et v deux vecteurs de E. Alors
$$u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux } \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proposition I.7
Formule de polarité *(Expression du produit scalaire à partir de la norme)*
$\forall (u, v) \in E^2,\ \langle u, v\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$.

Exercice 6
Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire défini sur un espace vectoriel E et soit $\|.\|$ la norme associée.
Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. (égalité du parallélogramme)

Théorème I.2
Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

$$\forall (u,v) \in E^2,\ |\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\| \times \|v\|.$$

Cas d'égalité :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ |\langle u,v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \iff \text{ la famille de vecteurs } (u,v) \text{ est liée.}$$

Proposition I.8
Inégalité triangulaire
$\forall u \in E, \forall v \in E$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).

Inégalité triangulaire généralisée
$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, $\|\sum_{i=1}^n u_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|u_i\|$.

Exercice 7
Conséquences de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,$\forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Montrer que $\forall (f,g) \in \left(\mathscr{C}^0([a,b])\right)^2$, $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \times \int_a^b g^2(t)dt$.
3. En utilisant l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^2 \leq \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n k^4}$$
4. EDHEC 2013 : montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ ,\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n \quad (1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)$.
5. EDHEC 2024 : montrer que pour tout $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\sum_{k=1}^n x_k)^2 \leq n.\sum_{k=1}^n x_k^2$.
6. Un peu de probabilités !!
Soit X une variable aléatoire réelle discrète finie avec $X(\Omega) = [[1,n]]$ $(n \geq 2)$.
Montrer que $E(\frac{1}{X}) \geq \frac{1}{E(X)}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(A) \leq \sqrt{n.tr({}^tA.A)}$.

II. Orthogonalité

II.1) Familles orthogonales

Définition II.1
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.
Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est une **famille orthogonale** lorsque

$$\forall (i,j) \in [[1,p]]^2, \text{ si } i \neq j, \text{ alors } u_i \text{ et } u_j \text{ sont orthogonaux.}$$

Exemple

1. Justifier que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire canonique.
2. Justifier que la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire canonique.

Théorème II.1
Théorème de Pythagore généralisé
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.
Soient $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$.
Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- Si la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale alors,
$$||u_1 + u_2 + \ldots + u_p||^2 = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 + \ldots + ||u_{p-1}||^2 + ||u_p||^2$$
- Si la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale alors,
$$\left\langle \sum_{i=1}^p a_i u_i, \sum_{j=1}^p a_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^p a_i^2 \langle u_i, u_i\rangle = \sum_{i=1}^p a_i^2 \|u_i\|^2$$

Théorème II.2
Orthogonalité et liberté
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.
Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs ne contenant pas le vecteur nul, alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre.

II.2) Familles orthonormales

Définition II.2
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est une **famille orthonormale** (ou **orthonormée**) lorsque

$$\forall (i,j) \in [[1,p]]^2 \text{ tel que } i \neq j,\ \langle u_i, u_j \rangle = 0 \ \textbf{ et } \ \forall i \in [[1,p]]^2 \quad \|u_i\| = 1.$$

Exemple

1. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique.
2. Montrer que la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.
Toute famille orthonormale de E est libre.

Proposition II.1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E **orthogonale** ne contenant pas le vecteur nul.
Alors la famille $(\frac{1}{\|u_1\|}u_1, \cdots, \frac{1}{\|u_n\|}u_n)$ est une **famille orthonormale** de E.

Exercice 8
On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
On note $P_0 = 1,\ \ P_1 = 2X - 1,\ P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.

1. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base orthogonale de E pour ce produit scalaire.
3. En déduire une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

II.3) Sous-espaces orthogonaux.

Définition II.3
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit u un vecteur de E
On dit que u **est orthogonal à** F lorsque pour tout vecteur v de F, u et v sont orthogonaux.

Proposition II.2
Vecteur orthogonal à un s.e.v. engendré
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Soit $(f_1, \cdots f_r)$ une famille génératrice de F : $F = Vect(f_1, \cdots, f_r)$.
Soit u un vecteur de E.
Alors u est orthogonal à F **si et seulement si** $\forall i \in [[1,r]],\ \langle u, f_i \rangle = 0$

Définition II.4
Sous-espaces vectoriels orthogonaux
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que les sous-espaces F et G sont **orthogonaux** si pour tout vecteur u de F et pour tout vecteur v de G, u et v sont orthogonaux.
On peut noter $F \perp G$.
Ainsi :

$$F \perp G \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \in F,\ \forall v \in G,\ u \perp v$$

Proposition II.3
Orthogonalité et s.e.v. engendrés
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.Soit $(r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Soit $(f_1, \cdots f_r)$ une famille génératrice de F : $F = Vect(f_1, \cdots, f_r)$.
Soit $(g_1, \cdots g_s)$ une famille génératrice de G : $G = Vect(g_1, \cdots, g_s)$.

F et G sont orthogonaux **si et seulement si** $\forall i \in [[1,r]],\ \forall j \in [[1,s]],\ \langle f_i, g_j \rangle = 0$

Théorème II.3
Orthogonalité et somme directe
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Si F et G sont orthogonaux, alors F et G sont en somme directe.

III. Espace euclidien

Définition III.1
On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de **dimension finie** muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ donné.

Proposition III.1
Les espaces euclidiens usuels

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique est un espace euclidien.
- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique est un espace euclidien.

et d'autres :

- $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un espace euclidien.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A,B) \longmapsto tr({}^tAB)$ est un espace euclidien. etc...

III.1) Base orthonormée d'un espace euclidien

Définition III.2
Soit E un espace euclidien.
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une **base orthogonale** de E lorsque $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et une famille orthogonale de E.
On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une **base orthonormée** de E (**BON**) lorsque $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et une famille orthonormée (ou orthonormale) de E.

Proposition III.2
Bases canoniques

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.
- La base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.

III.2) Méthode d'orthonormalisation de Schmidt

<u>**Question**</u> : étant donné un e.v. E de dimension finie $n \geq 1$, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, existe-t-il une BON de E ? La réponse est oui, et la méthode de Schmidt donne même une construction effective d'une BON.

Théorème III.1
(Enoncé général non exigible, mais il faut savoir appliquer la méthode sur quelques vecteurs)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille **libre** de vecteurs de E.
   (a) Soit $\boxed{N_1 = \frac{1}{\|e_1\|}.e_1}$
   (b) Soit $R_2 = e_2 - \langle e_2, N_1 \rangle .N_1$ puis $N_2 = \frac{1}{\|R_2\|}.R_2$.
   (c) Soit $R_3 = e_3 - \langle e_3, N_1 \rangle .N_1 - \langle e_3, N_2 \rangle .N_2$ puis $N_3 = \frac{1}{\|R_3\|}.R_3$.
   etc...
   On réitère ce processus en construisant successivement N_1, R_2, N_2, etc..., R_n, N_n où
   $\boxed{R_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, N_i \rangle .N_i \text{ et } N_k = \frac{1}{\|R_k\|}.R_k}$
   La famille $\mathcal{D} = (N_1, N_2, \cdots, N_n)$ est une base orthonormée de $Vect(e_1, \cdots, e_n)$.
2. En particulier si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors $(N_1, \cdots, N_n)$ est une base orthonormée de E.
3. Par conséquent **tout espace euclidien** E **admet une base orthonormée**, que l'on peut construire par la méthode de Schmidt.

Remarque
Preuve par récurrence sur $n \geq 1$.

Exercice 9
1. Justifier que $\big((1,1),(3,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ à partir de cette base.
2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du p.s. canonique, soit
$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; \quad x+y+z+t=0\}$$
   Justifier que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ puis donner une BON de F.
3. On note $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2 \quad \langle P,Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
   (a) Justifier que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire.
4. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$, déterminer une BON de E.

Théorème III.2
Caractérisation des bases orthogonales en dimension connue
Soit E un espace **euclidien** de dimension $p \in \mathbb{N}^*$.
La famille $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ est une **base orthogonale** de E si et seulement si :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall k \in [[1,n]], \quad u_k \in E \text{ et } u_k \neq 0_E \\ \bullet\ n = dim(E) = p \quad (\text{ c'est à dire } card(\mathscr{F}) = dim(E)) \\ \bullet\ \text{la famille de vecteurs } (u_1, \cdots, u_n) \text{ est une famille orthogonale} \end{cases}$$

Remarque
Obtention en pratique d'une BON :

- Cas de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Pour les produits scalaires canoniques transformation d'une base orthogonale en une BON (en normalisant chaque vecteur)
- Utilisation du procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour construire une BON à partir d'une base quelconque.

III.3) Existence théorique d'une BON

Théorème III.3
Théorème de la base orthonormée incomplète.
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit p un entier naturel non nul.
Soient $(e_1, \cdots, e_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.
Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthonormée et si $p < n$ alors il existe des vecteurs de E, $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

III.4) Expressions dans une BON

Proposition III.3
Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une **base orthonormée** de E.
Pour tout vecteur u de E,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \quad \text{ou aussi} \quad Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(u) = \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle \\ \langle u, e_2 \rangle \\ \cdots \\ \langle u, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Remarque
Si $u = \sum\limits_{i=1} x_i.e_i$, alors $\forall i \in [[1, n]]$, $x_i = \langle u, e_i \rangle$.

Proposition III.4
Expression du produit scalaire de deux vecteurs en BON
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une **base orthonormée** de E.
Soient x et y des vecteurs de E .

$x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. On note $X = Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \cdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$

$y = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle e_i$. On note $Y = Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, e_1 \rangle \\ \langle y, e_2 \rangle \\ \cdots \\ \langle y, e_n \rangle \end{pmatrix}$

Le produit scalaire du couple (x, y) est donné par la formule suivante :

$$\langle x, y \rangle = {}^tX.Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$

Proposition III.5
Expression de la norme d'un vecteur
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une **base orthonormée** de E.
Soit x un vecteur de E, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

On note $X = Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \cdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$

La norme de x est donnée par la formule suivante :

$$\|x\| = \sqrt{{}^tX.X} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2}$$

Théorème III.4
Matrice d'un endomorphisme dans une BON
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit f un endomorphisme de E.
La matrice A de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ est donné par la formule suivante :

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle f(e_1), e_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_1 \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_i \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_i \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_i \rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_n \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_n \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Remarque
Avec les notations ci-dessus,

$$\langle x, f(y) \rangle = {}^tX.AY \quad \text{et} \quad \langle f(x), y \rangle = {}^tX.{}^tA.Y$$

Théorème III.5
Matrice de passage entre deux BON
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases **orthonormées** de E.

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ vers la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \langle e'_1, e_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle e'_j, e_1 \rangle & \cdots & \langle e'_n, e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \langle e'_1, e_i \rangle & \cdots & \cdots & \langle e'_j, e_i \rangle & \cdots & \langle e'_n, e_i \rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \langle e'_1, e_n \rangle & \cdots & \cdots & \langle e'_j, e_n \rangle & \cdots & \langle e'_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$. Une telle matrice est dite **orthogonale**.

III.5) Matrice orthogonale

Définition III.3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On dit que la matrice M est **orthogonale** lorsque M est inversible et $M^{-1} =^t M$.

Remarque
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
M est une matrice orthogonale $\iff$ $M \times^t M = I_n$

M est une matrice orthogonale $\iff$ ${}^tM \times M = I_n$

Proposition III.6
Caractérisation d'une base orthonormale (à la limite du programme)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
M est une matrice orthogonale $\iff$ la famille des vecteurs colonnes de la matrice M est orthonormale pour le produit scalaire canonique de$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve à comprendre : résultat HP mais peut servir.

Proposition III.7
Caractérisation d'une BON (HP)
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une BON de E.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note P la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$: $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

La famille $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de $E \iff$ la matrice P est orthogonale.

Exercice 10
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du p.s. canonique, soit $e'_1 = (0,1,0)$, $e'_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $e'_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

III.6) Supplémentaire orthogonal

Définition III.4
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle **orthogonal de** F l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à F.
On le note $F^\perp$.

$F^\perp = \{u \in E$ tels que ....

Soit $u \in E$, $\quad u \in F^\perp \iff \ldots$

Remarque
- Si $F = \{0\}$ alors $F^\perp =$
- Si $F = E$ alors $F^\perp =$

Proposition III.8
Propriétés de l'orthogonal
Soit E un espace euclidien de dimension n.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. L'orthogonal de F, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E orthogonal à F.
2. $F \oplus F^\perp = E$.
   $F^\perp$ est appelé LE **supplémentaire orthogonal de** F.
3. $\dim(F^\perp) = \ldots$
4. $(F^\perp)^\perp = F$.
5. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
6. $F^\perp = G$ si et seulement si $F \perp G$ et $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Théorème III.6
Soit E un espace euclidien et F un s.e.v. de E.

1. Si $\mathcal{C} = \{e_1, \cdots, e_p\}$ est une BON de F et $\mathcal{D} = \{e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ est une BON de $F^\perp$ alors (par concaténation) $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_p, \cdots, e_n\}$ est une BON de E.
2. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_p, \cdots, e_n\}$ est une BON de E et si $F = Vect(e_1, \cdots, e_p)$, alors$\{e_1, \cdots, e_p\}$ est une BON de F et $\{e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ est une BON de $F^\perp$.

Exercice 11
Exercice de cours
Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 /\ \ x + y + z + t = 0\}$.
Démontrer très rapidement (en utilisant le produit scalaire) que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, déterminer $F^\perp$ et une BON de $F^\perp$.

Exercice 12
Généralisation : hyperplans de $\mathbb{R}^n$
Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, avec $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Soit

$$G = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n /\ \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

Démontrer très rapidement (en utilisant le produit scalaire) que G est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, déterminer $G^\perp$ et une BON de $G^\perp$.

III.7) Petits exercices sur le supplémentaire orthogonal

1. Soient $F = \text{Vect}\Big((0,1,1),(1,1,1)\Big)$ et $G = \text{Vect}\Big((0,1,-1)\Big)$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $F = \text{Vect}\Big((1,1,\cdots,1)\Big)$ et $G = \Big\{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\Big\}$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.
3. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique,
   donner une base du supplémentaire orthogonal de $H = \text{Vect}((1,1,2,0),(1,2,-1,1))$.
4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$, déterminer le supplémentaire orthogonal de $F = \text{Vect}(1, X)$.
5. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire $(P,Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$, déterminer le supplémentaire orthogonal de $F = \text{Vect}(1, X)$.
6. L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions continues et paires sur $[-1,1]$ et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions continues et impaires sur $[-1,1]$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.
7. L'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices carrées antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< A, B >= {}^tAB$.