Corrigé du DS n°4 - 3/12/2025

Exercice 1

1. $X_2(\Omega) = [[1,2]]$. De plus, $P(X_2 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{2}$.
   D'où $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$.
   Bilan : $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([[1,2]])}$
   D'après le cours, $\boxed{E(X_2) = \frac{3}{2}}$ et $\boxed{V(X_2) = \frac{2^2-1}{12} = \frac{1}{4}}$

2. $X_3(\Omega) = [[1,3]]$.
   L'événement $[X_3 = 1]$ correspond au cas où la première boule tirée est la boule 1. D'où
   $$P(X_3 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{3}$$
   Ensuite, $[X_3 = 3]$ est réalisé si l'on obtient la boule 3, puis la boule 2, puis la boule 1. Ainsi
   $$\begin{aligned} P(X_3 = 3) &= P([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]) \\ &= P(N_1 = 3) \times P_{[N_1=3]}(N_2 = 2) \times P_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3 = 1) \text{ d'après la FPC} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$
   et enfin, comme $([X_3 = k])_{k\in[[1,3]]}$ est un SCE :
   $$P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
   On en déduit que
   $$E(X_3) = \frac{1}{3} + 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

3. De même que précedemment, $X_n(\Omega) = [[1,n]]$.

4. $$P(X_n = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{n}$$
   $$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P([N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \cdots \cap [N_n = 1]) \\ &= P(N_1 = n) \times P_{N_1=n}(N_2 = n-1) \times \cdots \times P_{[N_1=n]\cap\cdots\cap[N_{n-1}=2]}(N_n = 1) \text{ d'après la FPC} \\ &= \frac{1}{n}.\frac{1}{n-1}.\cdots.\frac{1}{2}.1 \\ &= \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

5. ```
   import numpy.random as rd
   def Exercice1(n):
       nb_boules=n       #nombre de boules initial
       a=rd.randint(1,nb_boules+1)       #premier tirage
       nb_boules=a-1       #on ne garde que les boules de 1 à a-1
       X=1       #on a fait un tirage
       while nb_boules!=0:
           a=rd.randint(1,nb_boules+1)
           nb_boules=a-1
           X=X+1
       return X
   ```

6. On travaille dans le SCE $([N_1 = i])_{i\in[[1,n]]}$. D'après la FPT dans ce SCE, pour tout $k \geq 2$,
   $$P(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} P([N_1 = i]) \times P_{N_1=i}(X_n = k)$$
   Remarquons que si $i = 1$ et $[N_1 = 1]$ est réalisé, alors le jeu s'arrête dès le premier tirage, donc $P_{N_1=1}(X_n = k) = 0$ puisque $k \geq 2$.
   Si $i \geq 2$, alors il reste après le premier tirage $i-1$ boules dans l'urne. Tout se passe alors comme si l'on devait vider une urne ne contenant plus que $i-1$ boules lors des $k-1$ tirages restants. Ainsi, $P_{N_1=i}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k-1)$. On a alors
   $$P(X_n = k) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n} \times P(X_{i-1} = k-1) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k-1).$$

7. $$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} k.P(X_n = k) \\ &= P(X_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} k.\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k-1) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} k.P(X_{i-1} = k-1) \\ &= \frac{1}{n}.(1 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1).P(X_{i-1} = j)) \\ &= \frac{1}{n}.(1 + \sum_{i=2}^{n}(\sum_{j=1}^{n-1} j.P(X_{i-1} = j) + \sum_{j=1}^{n-1} P(X_{i-1} = j)) \\ &= \frac{1}{n}.(1 + \sum_{i=2}^{n} E(X_{i-1}) + 1)) \\ &= \frac{1}{n}.(1 + n + \sum_{i=2}^{n} E(X_{i-1})) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.\sum_{i=2}^{n} E(X_{i-1}) \end{aligned}$$
   et en particulier, $\sum_{i=2}^{n} E(X_{i-1}) = n.E(X_n) - n - 1$.
   On a aussi par décalage d'indice,
   $$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}.\sum_{i=2}^{n+1} E(X_{i-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}.(E(X_n) + \sum_{i=2}^{n} E(X_{i-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}.(E(X_n) + n.E(X_n) - n - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} + E(X_n) - 1 \\ &= E(X_n) + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
   Bilan : $\boxed{E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}}$
   ```

8. On obtient par une récurrence facile (ou descente avec des pointillés) :

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + E(X_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ puisque } X_1 = 1$$

9. (a) Question hyper-classique !
Soit $k \geq 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

d'où en intégrant entre k et $k+1$ (bornes bon sens et fonction continue),

$$\frac{1}{k+1}.\int_k^{k+1} 1dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}\int_k^{k+1} 1dt$$

et $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}$.
On a donc déjà $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$. De plus en décalant les indices dans l'inégalité de gauche, on trouve que pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$$

Bilan : $\boxed{\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}$

(b) On somme cette relation pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

puis en répétant la relation de Chasles :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t}dt$$

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

et enfin

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$

ce qui implique que

$$\ln(n) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$

D'où en divisant par $\ln(n)$:

$$1 - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

D'où par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1$

Bilan : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$

A SAVOIR REFAIRE TRES TRES VITE - ARCHI CLASSIQUE !!!!!!

(c) On en déduit ainsi que $\boxed{E(X_n) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)}$

Exercice 2 : la loi de Weibull

Soit λ un réel fixé strictement positif. Soit X une variable aléatoire, dont la fonction de répartition $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda.\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. La fonction F_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement de 0.
De plus, $\lim_{x\to0^+} 1 - \exp(-\lambda.\sqrt{x}) = 1 - 1 = 0 = F_\lambda(0)$. Donc F_λ est continue en 0, et donc aussi sur $\mathbb{R}$.

Bilan : $\boxed{X \text{ est une variable aléatoire à densité}}$

On dit alors que X suit la loi $\mathcal{W}(\lambda)$: loi de Weibull de paramètre λ.

2. Pour tout $x > 0$,

$$F'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}}.e^{-\lambda.\sqrt{x}}$$

On obtient une densité de X en dérivant F_X lorsque cela est possible (ici sur $\mathbb{R}^*$) et en donnant une valeur arbitraire ailleurs (ici en 0). Donc une densité de X est :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda}{2\sqrt{x}}.e^{-\lambda.\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. La fonction F_λ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$. En redérivant le résultat précédent :

$$\begin{aligned} F''_\lambda(x) &= \frac{\lambda}{2}.\left(-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}.e^{-\lambda.\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}.\left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\right).e^{-\lambda.\sqrt{x}}\right. \\ &= \frac{\lambda}{4x}.\left(-\frac{1}{\sqrt{x}} - \lambda\right).e^{-\lambda.\sqrt{x}} \end{aligned}$$

tous calculs faits. Comme $\lambda > 0$, on voit alors que $\forall x > 0$, $F''_\lambda(x) < 0$: la fonction F_λ est concave sur $]0; +\infty[$.

Etudions la dérivabilité de F_λ en 0^+ : pour tout $x > 0$,

$$\frac{F_\lambda(x) - F_\lambda(0)}{x - 0} = -\frac{e^{-\lambda.\sqrt{x}} - 1}{x}$$

Comme $e^u - 1 \sim_{u\to0} u$, et comme $\lim_{x\to0} -\lambda.\sqrt{x} = 0$, on a

$$\frac{F_\lambda(x) - F_\lambda(0)}{x - 0} \sim_{x\to0^+} \frac{\lambda.\sqrt{x}}{x} \sim_{x\to0^+} \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \to_{x\to0^+} +\infty$$

Bilan : F_λ n'est pas dérivable à droite en 0. On peut dire que la courbe $\mathcal{C}_{F_\lambda}$ admet une demi-tangente horizontale à droite en 0.

4. Allure de la courbe représentative de F_λ :

5. Soit Y la variable aléatoire $Y = \lambda \cdot \sqrt{X}$.

   (a) Comme $\lambda > 0$ et $X(\Omega) =]0;+\infty[$, on voit que $Y(\Omega) =]0;+\infty[$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Premier cas : si $x \leq 0$ alors $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$.
   - Deuxième cas : si $x > 0$ alors

   $$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(\lambda.\sqrt{X} \leq x) \\ &= P(X \leq (\frac{x}{\lambda})^2) \text{ par stricte croissance de la fonction carré sur }]0;+\infty[\\ &= F_X(\frac{x^2}{\lambda^2}) \\ &= 1 - e^{-\lambda.\frac{x}{\lambda}} \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

   - On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

   Bilan : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

   D'après le cours, une densité de Y est donc :

   $$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de transfert, sous réserve de convergence (absolue) :

   $$\begin{aligned} E(Y^r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^r.f_Y(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^r.e^{-t}dt \\ &= \Gamma(r+1) = r! \end{aligned}$$

   Bilan : $\boxed{E(Y^r) \text{ existe et } E(Y^r) = r!}$

   (c) Comme $Y = \lambda.\sqrt{X}$, on a $X = \frac{1}{\lambda^2}.Y^2$. Donc pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $X^r = \frac{1}{\lambda^{2r}}.Y^{2r}$. Comme $E(Y^{2r})$ existe, X^r admet une espérance et

   $$E(X^r) = \frac{1}{\lambda^{2r}}.E(Y^{2r}) = \frac{1}{\lambda^{2r}}.(2r)!$$

   En particulier, $E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$ et $E(X^2) = \frac{4!}{\lambda^4} = \frac{24}{\lambda^2}$. Par la formule de Huygens, on a ensuite

   $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{24}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{20}{\lambda^4}$$

   Bilan : $\boxed{E(X) = \frac{2}{\lambda^2}}$ et $\boxed{V(X) = \frac{20}{\lambda^4}}$

6. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
   Alors $(Z^2)(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - 1er cas : si $x < 0$ alors $F_{Z^2}(x) = 0$.
   - 2ème cas : si $x \geq 0$ alors

   $$\begin{aligned} F_{Z^2}(x) &= P(Z^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \text{ car } x \geq 0 \\ &= P(-\sqrt{x} < Z \leq \sqrt{x}) \text{ car } X \text{ est à densité} \\ &= F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x}) \\ &= 1 - e^{-\lambda.\sqrt{x}} - 0 = 1 - e^{-\lambda.\sqrt{x}} \end{aligned}$$

   - Bilan : on reconnait la fonction de répartition de X, donc $\boxed{Z^2 \text{ a même loi que } X}$

   En particulier,

   $$E(X) = E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

   et on retrouve bien le résultat obtenu en 5. (c).

Problème

Partie 1 : Temps d'attente pour deux guichets

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[X_1 = k]$ est réalisé si le schéma de Bernoulli correspondant débute par k échecs consécutifs, d'où $P(X_1 > k) = q^k$.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$\begin{aligned} P(Z > k) &= P(min(X_1, X_2) >) = P([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) \\ &= P(X_1 > k).P(X_2 > k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= q^k.q^k = q^{2k} \end{aligned}$$

   (c)

   $$P(Z = 1) = P(min(X_1, X_2) = 1) = 1 - P(min(X_1, X_2) > 1) = 1 - q^2$$

   (d) $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $P(Z_1 = 1) = 1 - q^2$ et si $k \geq 2$,

   $$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k) = q^{2k-2} - q^{2k} = (1 - q^2).(q^2)^{k-1}$$

   Bilan : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = (1 - q^2).(q^2)^{k-1}$
   Par conséquent $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2)}$
   D'après le cours, $\boxed{E(Z) = \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{p(1+q)}}$ et $\boxed{V(Z) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}}$

2. (a) On a d'abord

   $$T + Z = max(X_1, X_2) + min(X_1, X_2) = X_1 + X_2$$

   et ensuite

   $$\Delta = |X_1 - X_2| = max(X_1, X_2) - min(X_1, X_2) = T - Z$$

(b) Comme $T+Z = X_1 + X_2$, on a par linéarité de l'espérance,

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2) - E(Z) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1+q)} = \frac{2+2q-1}{p(1+q)} = \frac{1+2q}{p(1+q)}$$

(c) Z et T ne sont pas indépendantes, puisque par exemple $P([Z=1]\cap[T=2]) = 0$, alors que $P(Z=1).P(T=2) \neq 0$.

3. (a) Il est clair que $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) $[\Delta = 0] = [X_1 = X_2]$ donc

$$\begin{aligned}
P(\Delta = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k).P(X_2 = k) \quad \text{par indépendance de } \; X_1 \text{ et } X_2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^2 = p^2.\sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2.\sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j = p^2.\frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{p}{1+q} = \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[X_1 - X_2 = n] = ([X_1 = n+1] \cap [X_2 = 1]) \cup ([X_1 = n+2] \cap [X_2 = 2]) \cup \cdots$$

D'où, les événements étant deux à deux incompatibles,

$$\begin{aligned}
P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = n+k] \cap [X_2 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = n+k]).P([X_2 = k]) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p.q^{n+k-1}.p.q^{k-1} \\
&= p.q^n.\sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p.q^n.\sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j \quad \text{en posant } \; j = k-1
\end{aligned}$$

$$P(X_1 - X_2 = n) = p.q^n.\frac{1}{1-q^2} = \frac{p.q^n}{1+q}$$

On a ensuite

$$[\Delta = n] = [X_1 - X_2 = n] \cup [X_2 - X_1 = n]$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(\Delta = n) &= P(X_1 - X_2 = n) + P(X_2 - X_1 = n) \text{ par incompatibilité} \\
&= 2.P(X_1 - X_2 = n) \;\text{ car }\; X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont la même loi} \\
&= \frac{2p.q^n}{2-p}
\end{aligned}$$

<u>Loi de Δ :</u>

- $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$
- $P(\Delta = 0) = \frac{p}{2-p}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\Delta = n) = \frac{2p.q^n}{2-p}$

(d) La variable Δ admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geq 0} n.P(\Delta = n)$ est convergente (elle est alors absolument convergente car à termes positifs).
Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
E(\Delta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n.P(\Delta = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n.\frac{2p.q^n}{2-p} \quad \text{le terme en } n = 0 \text{ étant nul} \\
&= \frac{2pq}{2-p}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.q^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique dérivée, qui converge car $|q| < 1$. Donc $E(\Delta)$ existe bien, et en reprenant le calcul :

$$\begin{aligned}
E(\Delta) &= \frac{2pq}{2-p}.\frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \frac{2q}{p(2-p)}
\end{aligned}$$

Donc enfin $\boxed{E(\Delta) = \frac{2q}{p(2-p)}}$

4. L'événement $A = [X_3 > \Delta]$ est réalisé si le client C_3 achève son opération en dernier. Comme X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes, par coalition les variables aléatoires $\Delta = |X_1 - X_2|$ et X_3 sont indépendantes.
D'après la formule des probabilités totales dans le SCE $([\Delta = k])_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([\Delta = k] \cap [X_3 > \Delta]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P([\Delta = k] \cap [X_3 > k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P([\Delta = k]).P(X_3 > k) \quad \text{par indépendance de } \Delta \text{ et de } X_3 \\
&= P(\Delta = 0).P(X_3 > 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P([\Delta = k]).P(X_3 > k)
\end{aligned}$$

attention le terme en $k = 0$ n'est pas donné par la même formule

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{p}{2-p}.1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2p.q^k}{2-p}.q^k \\
&= \frac{p}{2-p} + \frac{2pq^2}{2-p} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= \frac{p}{2-p} + \frac{2pq^2}{2-p} \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^{j} \\
&= \frac{p}{2-p} + \frac{2pq^2}{2-p}.\frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{p}{2-p} + \frac{2q^2}{(1+q)(2-p)} \quad \text{or } 1+q = 2-p \\
&= \frac{p(2-p)+2(1-p)^2}{(2-p)^2} \\
&= \frac{p^2-2p+2}{(2-p)^2}
\end{aligned}$$

5. Simulation en Python

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
p=float(input("Entrer p : "))
X=rd.geometric(p,3)  #on simule les trois variables en même temps
#pas obligé on peut aussi simuler trois variables séparemment !!
print(X)
Delta=np.abs(X[1]-X[0])
print(Delta)
if Delta>X[2] :
    print("A est réalisé")
else :
    print("A n'est pas réalisé")
```

Partie 2 : Fonction génératrice associée à une VARD

6. Soit $t \in [-1,1]$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|P(Y=k).t^k| = P(Y=k).|t|^k \leq P(Y=k)$. Comme la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(Y=k)$ converge (et vaut 1), par critère de majoration pour les séries à termes positifs, la série de terme général $P(Y=k).t^k$ est absolument convergente.
D'après le théorème de transfert, l'espérance de t^Y existe et
$$E(t^Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k.P(Y=k) = G_Y(t)$$

7. $G_Y(1) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1$ car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq P(Y=k).t^k \leq P(Y=k)$. D'où en sommant :
$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k).t^k \leq \sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1$$
Donc $\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1],\ 0 \leq G_Y(t) \leq 1}$

8. Deux cas particuliers

(a) Soit N une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$G_N(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}.t^k = e^{-\lambda}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda.t)^k}{k!}$$
On reconnait une série exponentielle, qui converge donc quel que soit $t \in \mathbb{R}$. On a ensuite
$$G_N(t) = e^{-\lambda}.e^{\lambda.t} = e^{\lambda.(t-1)}$$
Cette fonction G_N est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{G'_N(t) = \lambda.e^{\lambda.(t-1)}}$
On a en particulier $\boxed{G'_N(1) = \lambda = E(N)}$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$.
$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p.q^{k-1}.t^k = pt.\sum_{k=1}^{+\infty} (qt)^{k-1} = pt.\sum_{i=0}^{+\infty} (qt)^i$$
On reconnait une série géométrique. Cette série converge si et seulement si $|qt| < 1 \Leftrightarrow |t| < \frac{1}{q}$ (car $q > 0$).
Donc le domaine de définition de G_X est $\mathcal{D}_X =]-\frac{1}{q};\frac{1}{q}[$.
Pour tout $t \in \mathcal{D}_X$,
$$G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$$
La fonction G_X est dérivable sur $\mathcal{D}_X$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle et
$$\forall t \in]-\frac{1}{q};\frac{1}{q}[,\quad G'_X(t) = \frac{p(1-qt)+pqt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$$
Comme $q \in]0,1[$, on a $\frac{1}{q} > 1$ donc $1 \in]-\frac{1}{q};\frac{1}{q}[$ et $\boxed{G'_X(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = E(X)}$

9. On considère une suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables mutuellement indépendantes, de même loi que Y.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
Soit $t \in [-1,1]$. D'après le 6., la fonction G_{S_n} est bien définie sur $[-1,1]$ et pour tout $t \in [-1,1]$,
$$\begin{aligned}
G_{S_n}(t) &= E(t^{S_n}) \\
&= E(t^{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}) \\
&= E(t^{Y_1}.t^{Y_2}.\cdots.t^{Y_n})
\end{aligned}$$
Comme les variables Y_1, ..., Y_n sont mutuellement indépendantes, par coalition t^{Y_1}, ..., t^{Y_n} sont des variables mutuellement indépendantes. D'après le résultat admis, on a alors
$$\begin{aligned}
G_{S_n}(t) &= E(t^{Y_1}).\cdots.E(t^{Y_n}) \\
&= G_{Y_1}(t).\cdots G_{Y_n}(t) = (G_Y(t))^n
\end{aligned}$$
puisque les variables Y_1, ..., Y_n suivent toutes la même loi que Y.

Partie 3 : étude d'un seul guichet

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in N$,

$$\begin{aligned} P_{[N=n]}(S=i) &= \frac{P([N=n]\cap[\sum_{k=0}^{N} X_k = i])}{P([N=n])} \\ &= \frac{P([N=n]\cap[\sum_{k=0}^{n} X_k = i])}{P([N=n])} \end{aligned}$$

Comme les variables X_k ($k \in \mathbb{N}^*$) et N sont mutuellement indépendantes, n étant un entier fixé, par coalition les variables $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et N sont indépendantes. Donc

$$P_{[N=n]}(S=i) = \frac{P([N=n]).P(\sum_{k=0}^{n} X_k = i)}{P([N=n])} = P(\sum_{k=0}^{n} X_k = i) = P(S_n = i)$$

La loi conditionnelle de S sachant que $[N=n]$ est donc la même que la loi de S_n. On a donc

$$E(S|\ N=n) = E(S_n) = E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{n}{p}$$

(b) Sachant que $[N=0]$, on a $S = X_0 = 0$. Donc l'espérance conditionnelle de S sachant $[N=0]$ est $\boxed{E(S|\ [N=0]) = 0}$

(c) D'après la formule de l'espérance totale, sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n).E(S|[N=n]) \\ &= e^{-\lambda}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.\frac{n}{p} \\ &= \frac{\lambda.e^{-\lambda}}{p}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda.e^{-\lambda}}{p}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k}}{(k)!} \\ &= \frac{\lambda.e^{-\lambda}}{p}..e^{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{p} \end{aligned}$$

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$.
D'après le théorème de transfert, $E(t^S|[N=n])$ existe si et seulement si la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} t^i.P_{N=n}(S=i)$$

converge absolument, c'est à dire ssi $\sum_{i=0}^{+\infty} P(S_n = i).t^i$ converge absolument d'après le 11.a.

D'après la question 6., cette série est bien absolument convergente, donc $E(t^S|[N=n])$ existe. De plus

$$E(t^S|[N=n]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(S_n = i).t^i = G_{S_n}(t)$$

Puis, d'après le 9., les variables X_k étant mutuellement indépendantes :
$\boxed{E(t^S|[N=n]) = (G_{X_1}(t))^n}$
On admet de même que $E(t^S|\ [N=0]) = 1 = (G_{X_1}(t))^0$.

(b) La variable t^S étant bornée, elle admet bien une espérance.
D'après le théorème de l'espérance totale, sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} E(t^S) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([N=n]).E(t^S|[N=n]) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([N=n]).(G_{X_1}(t))^n \\ &= G_N(G_1(t)) = G_N \circ G_{X_1}(t) \end{aligned}$$

(c) D'après la Partie 2 : la fonction G_{X_1} est dérivable sur $]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}[$ et la fonction G_N est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, $G_S = G_N \circ G_{X_1}$ est dérivable sur $]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}[$, donc en 1.
Donc S admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(S) &= G_S'(1) \\ &= G_N'(G_{X_1}(t)).G_{X_1}'(t) \\ &= G_N'(1).G_{X_1}'(1) \\ &= E(N).E(X_1) \\ &= \frac{\lambda}{p} \end{aligned}$$