Chapitre 7 - Variables à densité (suite et fin)

1. Lois usuelles

- Loi uniforme sur $[a,b]$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Stabilité par transformation affine : si X suit une loi uniforme et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi uniforme, que l'on peut préciser en déterminant $Y(\Omega)$.
- Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Attention paramètre inversé dans la simulation Scilab.
  Stabilité : si $\alpha > 0$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ (savoir démontrer une implication *).
  Variante qui revient au même $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$
  Loi d'un processus sans mémoire : comprendre.
- Loi normale
  - Rappel : intégrale de Gauss.
  - Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition Φ, espérance, variance. Propriétés de Φ : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$ (sert tout le temps)
  - Loi normale de paramètres m et σ^2 : densité, fonction de répartition, espérance, variance.
  - Stabilité par transformation affine : si X suit une certaine loi normale, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi normale. On déterminera ses paramètres en calculant $E(Y)$ et $V(Y)$.
  - Centrage-réduction : si $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$ alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
  - Table des valeurs de la fonction Φ : à savoir utiliser.
- Loi petit gamma
  - Rappels sur la fonction Gamma.
  - Densité, espérance (*), variance (*) : calculs rapides grâce à la fonction Gamma.
  - On remarque que $X \hookrightarrow \gamma(1) \Leftrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- **Produit de convolution pour les variables à densité**
  A utiliser pour trouver la loi de $X+Y$ où X et Y sont à densité et indépendantes.

  Théorème
  Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ de densités respectives f_X et f_Y.
  On note $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt$
  - **Version1 : si la fonction h est définie, continue sur** $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points alors h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt$$
  - **Version 2**
  Si f_X ou f_Y est bornée sur $\mathbb{R}$ alors la fonction h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)dt$$

  On regardera donc d'abord si l'une des deux densités est bornée **pour pouvoir appliquer la version 2**, et sinon à défaut on se ramène à la version 1.

Exercice à savoir refaire : Soient λ et μ des réels strictement positifs tels que $\lambda \neq \mu$.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega), \mathcal{T}, P)$ suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.
On note $Z = X + Y$.
Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z

2. Stabilité pour la somme : loi gamma et loi normale

   (a) Si $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ (où $\nu_1 \in]0,+\infty[$ et $\nu_2 \in]0,+\infty[)$ et si X_1 et X_2 sont des variables **indépendantes**
   alors $\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)}$

   (b) Si $\forall k \in [[1,m]]$, $X_k \hookrightarrow \gamma(\nu_k)$ et si les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont **mutuellement indépendantes**
   alors $\boxed{X_1 + X_2 + \ldots + X_m \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n)}$

   (c) Conséquence pour une somme de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

   (d) Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes alors
   $$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

(e) Si $\forall k \in [[1,r]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ et si les r variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont **mutuellement indépendantes**, alors

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_r \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \cdots + m_r, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2)$$

3. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (début)

   (a) Inégalité de Markov.
   Démonstration guidée sous forme d'exercice (*) à savoir refaire :
   Soit X une variable aléatoire (à densité ou discrète), admettant une espérance, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
   Soit a un réel strictement positif. On note A l'événement $A = [X \geq a]$ On note $\mathbb{1}_A$ la variable indicatrice de l'événement A.

      i. Rappeler la définition de la variable $\mathbb{1}_A$.
      ii. Calculer l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.
      iii. Montrer que $a \times \mathbb{1}_A \leq X$. En déduire l'inégalité de Markov.

   (b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).
   Preuve en appliquant Markov à $Y = (X - E(X))^2$.

   (c) Exercice d'application à savoir refaire
   Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
   Montrer que $\forall \epsilon > 0, P\left(|X - \dfrac{1}{\lambda}| \geq \epsilon\right) \leq \dfrac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.
   En déduire que $P\left(X \geq \dfrac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$

Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire I (début)

1. Définition d'un produit scalaire.

2. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Quelques produits scalaires classiques sur $E = \mathcal{C}^0([a,b])$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur $E = \mathbb{R}[X]$... Preuves à savoir refaire pour chacun de ces produits scalaires !

4. Utilisation de la bilinéarité du produit scalaire.

5. Vecteurs orthogonaux.

6. Norme associée à un produit scalaire.

   (a) Normes associées aux produits scalaires canoniques.
   (b) Propriétés d'une norme : $\forall u \in E,\ \|u\| \geqslant 0$, $\forall u \in E,\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$, si u n'est pas le vecteur nul alors $\|u\| > 0$, $\forall u \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \|\alpha u\| = |\alpha|\ \|u\|$.
   (c) $\forall (u,v) \in E^2$, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$ (*)
   (d) Théorème de Pythagore : u et v sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (*)
   (e) Formule de polarité : $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ à savoir retrouver si besoin.
   (f) **Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité** (*) : à savoir utiliser (nombreux exemples dans le cours)
   (g) Inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée.

7. Orthogonalité

   (a) Familles orthogonales.
   (b) Th. de Pythagore généralisé : si la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale alors,

   $$||u_1 + u_2 + \ldots + u_p||^2 = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 + \ldots + ||u_{p-1}||^2 + ||u_p||^2$$

   (c) **Orthogonalité et liberté**
   Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs ne contenant pas le vecteur nul, alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre (*).

8. Famille orthonormée.

. (*) : **preuve exigible**