Sujet d'entrainement - facultatif- Sujet Maths2
décembre 2023

L'objet du problème est l'**étude de quelques aspects de la théorie classique du risque** dont le contexte et les notations sont introduits au fur et à mesure.
Cette théorie est utilisée par les actuaires (les statisticiens concepteurs de produits d'assurances).

Dans tout le problème, on considère deux suites de variables aléatoires réelles $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, vérifiant :

- les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots, C_1, \ldots, C_n \ldots$ sont indépendantes,
- les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ sont strictement positives et suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1,
- les variables aléatoires $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{c}$ (et ont donc pour espérance c) où $c > 0$.

On pose $T_0 = 0$ et, pour tout $n \in N^*$, on note $T_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$

On observera que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que,
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

On notera $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

I. Étude d'une variable aléatoire

1. Soit t un réel fixé. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u \, du$$

2. Pour tout entier naturel n, déterminer l'espérance et la variance de T_n.

3. Soit t un réel positif ou nul.

   (a) Pour tout entier naturel n strictement supérieur à t, justifier l'inclusion entre événements :

   $$[T_n \leq t] \subset [|T_n - n| \geq n - t]$$

   (b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P([T_n \leq t])$.

   (c) Etudier la monotonie de la suite d'événements $([T_n \leq t])_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que l'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} [T_k \leq t]$ est de probabilité nulle.

4. Soit t un réel positif ou nul. Étant donné un élément ω de Ω, on considère l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / \ T_n(\omega) \leq t\}$. Si cet ensemble est fini, on note $N(t)(\omega)$ son plus grand élément.
Si cet ensemble est infini, on considère que $N(t)(\omega) = 0$.
On admet que $N(t)$ est une variable aléatoire réelle.

   Autrement dit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   - *si $n \neq 0$, $N(t)$ est égal à n si et seulement si : $T_n \leq t < T_{n+1}$.*
   - *si $n = 0$, $N(t)$ est égal à 0 si et seulement si ($0 \leq t < T_1$ ou l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/T_n(\omega) \leq t\}$ est infini).*

(a) Pour tout entier naturel n non nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire T_n.

(b) Exprimer $[N(t) = 0]$ à l'aide des variables aléatoires T_i et en déduire la valeur de $P([N(t) = 0])$ à l'aide de **3.(c)**.

(c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $[N(t) \leq n]$ à l'aide de T_{n+1} et en déduire, en utilisant le **1.**, que

$$P([N(t) \leq n]) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k e^{-t}}{k!}$$

(d) Pour tout réel t positif ou nul, reconnaître la loi de la variable aléatoire $N(t)$. On convient que $N(0) = 0$.

Pour toute la suite, a est un réel et r un réel strictement positif .

Pour tout réel positif t, on note $K_a(t)$ la variable aléatoire définie par : $K_a(t) = a + rt - \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$, en convenant que la somme $\sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ est nulle lorsque $N(t)$ est nul.

En particulier, $K_a(T_0) = K_a(0) = a$ et, pour tout entier naturel n non nul, puisque $N(T_n) = n$,

$$K_a(T_n) = a + rT_n - \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Par exemple, $K_a(t)$ pourrait représenter le capital (aléatoire) au temps t d'une compagnie d'assurance disposant d'un capital initial (de montant a éventuellement négatif), percevant des primes (de montant égal à r par unité de temps), et indemnisant des assurés victimes de sinistres de coûts aléatoires (les C_i) survenant à des dates elles-mêmes aléatoires (les T_i).

II. Probabilité d'être en déficit après le premier ou le second sinistre

1. Ecrire en `Python` un script simulant et affichant $K_a(T_n)$.

2. (a) Déterminer une densité de probabilité de la variable aléatoire $-r\Delta_1$.

   (b) Déterminer une densité f, continue sur $\mathbb{R}$, de la variable aléatoire $L_1 = C_1 - r\Delta_1$.

   (c) En déduire l'expression de la fonction de répartition F de la variable L_1 puis:

$$P([K_a(T_1) < 0]) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{c+r}\exp(\frac{a}{r}) & \text{si } a \leq 0 \\ \frac{c}{c+r}\exp(\frac{-a}{c}) & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

3. On pose $L_2 = C_2 - r\Delta_2$ et on considère la fonction g associant à tout réel x le réel

$$g(x) = P([L_1 \leq x] \cap [L_1 + L_2 \leq a])$$

   (a) Pour tout réel h strictement positif, justifier les inégalités

$$g(x+h) - g(x) \geq P([x < L_1 \leq x+h])P([L_2 \leq a - x - h])$$

   et

$$g(x+h) - g(x) \leq P([x < L_1 \leq x+h])P([L_2 < a - x])$$

   (b) En déduire que g est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'_d(x) = f(x)F(a-x)$.

   On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel x, $g'(x) = f(x)F(a-x)$.

4. (a) Prouver l'égalité

$$P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = \lim_{n \to +\infty} P([-n < L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a])$$

(b) En déduire l'égalité :

$$P([L_1 \leq a] \cap [L_1 + L_2 \leq a]) = \int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\ dx$$

(c) Établir les égalités : $P([K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0]) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)F(a-x)\ dx$

$$\text{et} \quad P([K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0]) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)P([L_2 > a-x])\ dx$$

5. En déduire, dans le cas où a est un réel positif ou nul, l'égalité

$$P([K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0]) = \frac{c}{c+r}\big(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2}\big)\exp\big(\frac{-a}{c}\big)$$

III. **Probabilité d'être en déficit au cours du temps : deux premiers cas**

Pour tout réel a, on note $\Pi(a)$ la probabilité suivante : $\Pi(a) = P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}[K_a(T_n) < 0]\Big)$

Dans le contexte décrit plus haut, $\Pi(a)$ *représenterait la probabilité que la compagnie d'assurance (disposant d'un capital initial de montant a) soit en déficit après un sinistre. En particulier si* $a < 0$ *alors* $\Pi(a) = 1$*, on s'intéressera alors aux a positifs.*

1. Montrer que la fonction Π est décroissante.
2. Pour tout réel a, quelles minorations de $\Pi(a)$ peut-on déduire de la partie II ?
3. **On admet** que la fonction Π est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie, pour tout réel a positif ou nul l'égalité :

$$\Pi(a) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\Pi(a-x)\ dx$$

Pourquoi, intuitivement, peut-on conjecturer cette égalité ?

4. Soit a un réel et n un entier naturel.
   (a) Calculer l'espérance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, a, c et r. Trouver sa limite quand n tend vers l'infini, selon les valeurs comparées de c et r.
   (b) Calculer la variance de $K_a(T_n)$ en fonction de n, r et c.
5. **Dans cette question**, on suppose que $c > r$ et $a \geq 0$.
   (a) Pour tout entier n strictement supérieur à $\frac{a}{c-r}$, montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :

$$P([K_a(T_n) < 0]) \geq 1 - \frac{n(c^2 + r^2)}{(a + nr - nc)^2}$$

   (b) En déduire que : $\Pi(a) = 1$.
6. **Dans cette question**, on suppose que $c = r$ et $a \geq 0$.
   (a) Soit y un nombre réel. En remarquant que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :

$$K_a(T_n) = a - \sum_{i=1}^{n}(C_i - r\Delta_i)$$

   et, à l'aide du Théorème Central Limite, exprimer $\lim\limits_{n\to+\infty} P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$, en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite notée Φ.
   (b) Pour tout nombre réel y strictement positif fixé, établir, pour tout entier naturel n assez grand, la double inégalité :

$$P([K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}]) \leq P([K_a(T_n) < 0]) \leq P([K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}])$$

   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} P([K_a(T_n) < 0])$ puis l'inégalité : $\Pi(a) \geq \frac{1}{2}$

IV. Probabilité d'être en déficit au cours du temps : le dernier cas

Dans cette partie, on suppose que $c < r$ et que $a \geq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(C_k - r\Delta_k)$.

1. (a) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n que :

$$\forall a \geq 0, \quad \Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp(\frac{-a}{c}) \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!(c+r)^k}$$

   (b) En déduire, pour tout réel a positif ou nul, la minoration :

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \exp\bigl(\frac{-ar}{c(c+r)}\bigr)$$

2. (a) Montrer que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \dfrac{1}{c}$, la variable $\exp(\lambda L_1)$ possède une espérance que l'on calculera.

   (b) Pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \dfrac{1}{c}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité :

$$E\bigl(\exp(\lambda S_n)\bigr) = \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

3. (a) Pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \dfrac{1}{c}$, tout réel $a \geq 0$ et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'inégalité :

$$P([S_n > a]) \leq e^{-\lambda a} E(\exp(\lambda S_n))$$

   (b) En déduire que tout réel λ élément de $\left]0, \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{r}\right[$, la série de terme général $\dfrac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$ converge et qu'on a l'inégalité :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[S_n > a]\right) \leq e^{-\lambda a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r\lambda)^n(1-c\lambda)^n}$$

4. Montrer que, comme $a \geq 0$, $\Pi(a) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[S_n > a]\right)$, et établir les résultats suivants :

   - $\lim\limits_{a \to +\infty} \Pi(a) = 0$,
   - pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{r}$, et tout réel a assez grand, on a l'inégalité : $\Pi(a) \leq e^{-\lambda a}$ *(on introduira un réel μ vérifiant $\lambda < \mu < \frac{1}{c} - \frac{1}{r}$).*

5. (a) Montrer que si une fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de limite nulle en $+\infty$, alors la fonction $|\psi|$ a un maximum sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Soient Π_1 et Π_2 deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, toutes deux de limite nulle en $+\infty$, vérifiant pour tout réel a positif ou nul, les égalités :

$$\Pi_1(a) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\Pi_1(a-x)\,dx \quad \text{et} \quad \Pi_2(a) = P([L_1 > a]) + \int_{-\infty}^{a} f(x)\Pi_2(a-x)\,dx$$

   Montrer que les fonctions Π_1 et Π_2 coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) Établir, pour tout réel a positif ou nul, l'égalité suivante :

$$\Pi(a) = \frac{c}{r} \exp\bigl(-a(\frac{1}{c} - \frac{1}{r})\bigr)$$