

I. Etude d'une variable aléatoire.

1. La fonction $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(t) = e^t$ donc $\exp^{(n)}(0) = 1$.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral,
 appliquée à $\exp$ entre 0 et $t \in \mathbb{R}$:

$$e^t = \sum_{k=0}^n \exp^{(k)}(0) \cdot \frac{t^k}{k!} + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(u) du$$

$$\Rightarrow e^t = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

donc

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} + e^{-t} \cdot \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} e^u du$$

2.

* Par linéarité, $E(T_n) = \sum_{i=1}^n E(\Delta_i) = n$

* Comme $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ sont indépendantes,

$$V(T_n) = \sum_{i=1}^n V(\Delta_i) = n$$

III (2)

3. (a) Soit $t \geq 0$ et $n > t$.

Supposons que $T_n \leq t$. Alors $T_{n-m} \leq t-m < 0$

D'où $|T_{n-m}| = n - T_n \geq n - t$.

$$\text{Ainsi } [T_n \leq t] \subset [|T_{n-m}| \geq n-t]$$

(b) D'après l'IBT: $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}.$$

D'où avec $\varepsilon = n - t$:

$$P(|T_n - E(T_n)| \geq n-t) \leq \frac{n}{(n-t)^2} \sim \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - E(T_n)| \geq n-t) = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq t) = 0$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$

Si $T_{n+1} \leq t$ alors $\Delta_1 + \dots + \Delta_n + \Delta_{n+1} \leq t$

$$\Rightarrow \Delta_1 + \dots + \Delta_n \leq t - \Delta_{n+1} \leq t \Rightarrow T_n \leq t$$

Donc la suite d'événements $([T_n \leq t])$ est décroissante

$$\text{car } [T_{n+1} \leq t] \subset [T_n \leq t].$$

Par propriété de limite monotone,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} [T_k \leq t]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq t) = 0.$$

4. (a) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Delta_k \hookrightarrow \delta(x) = \delta(x).$

Par stabilité par la loi δ (variables indépendantes),

$$T_n \hookrightarrow \delta(n)$$

(b) $[N(t)=0]$ réalise sur l'ensemble $\{\omega \in \Omega / T_1(\omega) \leq t\}$ est infini. Car la suite $(T_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\omega) \leq t$.

$$P(N(t)=0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} [T_k \leq t]\right) = 0 + 1 - P(T_1 \leq t) = 1 - (1 - e^{-t}) = e^{-t}$$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-t}$

$$\begin{aligned} P(N(t) \leq n) &= P(\dots, t < T_{n+1}) = 1 - P(T_{n+1} \leq t) \\ &= 1 - \int_0^t \frac{1}{n!} \cdot u^n e^{-u} du \quad \text{car } T_{n+1} \hookrightarrow \delta(n+1) \\ &= 1 - \frac{1}{n!} \int_0^t u^n e^{-u} du \end{aligned}$$

On pose $v = t - u$ (changement de variables autorisé, on a $u \in \mathcal{C}^1([0, t])$, $dv = -du$)

$$\begin{aligned} P(N(t) \leq n) &= 1 - \frac{1}{n!} \int_0^t (t-v) \cdot e^{-(t-v)} \cdot -dv \\ &= 1 - \frac{1}{n!} e^{-t} \int_0^t (t-v) \cdot e^v dv \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} \quad \text{d'après le 1.} \end{aligned}$$

(d) Soit $t > 0$.

$$(N(t))(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\begin{aligned} P(N(t)=n) &= P(N(t) \leq n) - P(N(t) \leq n-1) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k e^{-t}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k e^{-t}}{k!} \\ &= \frac{t^n}{n!} \cdot e^{-t} \quad (\text{encore vrai si } n=0). \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall t > 0, N(t) \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$

II. Probabilité d'être en déficit après le premier ou le second ministre

```
1. a=input('a='); c=input('c=');
   n=input('n=');
   r=input('r=');
   D=randi(n,'exp',1);
   C=randi(n,'exp',1);
   K=a+r*sum(D)-sum(C);
   disp(K)
```

2. (a) $\Delta_x(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ donc $(-x\Delta_x)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_-$.

$\forall x \leq 0$,

$$F_{-x\Delta_x}(x) = P(-x\Delta_x \leq x) \\ = P(\Delta_x \geq -\frac{x}{2})$$

$$= 1 - P(\Delta_x \leq -\frac{x}{2}) \text{ car } \Delta_x \text{ à densité}$$

$$= 1 - (1 - e^{-1-\frac{x}{2}}) = e^{-x/2} \quad \text{bien une fonction de ref. de van à densité.}$$

Donc $-x\Delta_x$ a pu densité: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{-x\Delta_x}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) $L_x = C_x - x\Delta_x = C_x + (-x\Delta_x)$

• Comme C_x et Δ_x sont indépendantes, C_x et $(-x\Delta_x)$ le sont aussi (condition)

• C_x et $(-x\Delta_x)$ sont à densité

• f_{C_x} est bornée (majorée par $e^{-1/2}$).

Donc L_x est à densité. Une densité de L_x est donnée par le produit de convolution: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{L_x}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{C_x}(t) f_{-x\Delta_x}(x-t) dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (3)

$$f_{C_x}(t) \cdot f_{-x\Delta_x}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \text{et} \\ x-t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \text{et} \\ t \geq x \end{cases}$$

1^{er} cas: si $x \leq 0$ alors

$$f_{L_x}(x) = \int_0^{+\infty} f_{C_x}(t) \cdot f_{-x\Delta_x}(x-t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{c} \cdot e^{-\frac{1}{c}t} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x-t}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2c} \cdot e^{x/2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{1}{c} + \frac{1}{2})t} dt$$

$$= \frac{1}{2c} \cdot e^{x/2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{2}} \quad (\text{intégrale de Gauss})$$

$$= \frac{1}{2c} \cdot \frac{2c}{2+c} e^{x/2} = \frac{1}{2+c} e^{x/2}$$

2^{ème} cas: si $x > 0$ alors

$$f_{L_x}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{c}t} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x-t}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2c} \cdot e^{x/2} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-(\frac{1}{c} + \frac{1}{2})t} dt = \frac{1}{2c} \cdot e^{x/2} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{2}} e^{-(\frac{1}{c} + \frac{1}{2})t} \right]_x^A$$

$$= \frac{1}{2c} \cdot e^{x/2} \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{2}} e^{-(\frac{1}{c} + \frac{1}{2})t} \right]_x^A$$

$$= \frac{1}{r+c} e^{x/r} \cdot \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{r}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{r}\right)x}$$

$$= \frac{1}{r+c} e^{x/r} \cdot e^{-\frac{r+c}{rc}x} = \frac{1}{r+c} \cdot e^{-\frac{x}{c}}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{L_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{r+c} e^{x/r} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{r+c} e^{-x/c} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{L_1}(x) = \int_{-\infty}^x f_{L_1}(t) dt$

Si $x \leq 0$,

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{r+c} \int_{-\infty}^x e^{t/r} dt$$

$$= \frac{1}{r+c} \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[r e^{t/r} \right]_A^x = \frac{r}{r+c} e^{x/r}$$

Si $x > 0$,

$$F_{L_1}(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{r+c} e^{t/r} dt + \int_0^x \frac{1}{r+c} e^{-t/c} dt$$

$$= F_{L_1}(0) + \frac{1}{r+c} \left[-c \cdot e^{-t/c} \right]_0^x$$

$$= \frac{r}{r+c} + \frac{1}{r+c} (-c e^{-x/c} + c)$$

$$F_{L_1}(x) = \frac{r}{r+c} + \frac{c}{r+c} - \frac{c}{r+c} e^{-x/c}$$

$$= 1 - \frac{c}{r+c} e^{-x/c}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_{L_1}(x) = \begin{cases} \frac{r}{r+c} e^{x/r} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{c}{r+c} e^{-x/c} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'où $P(K_a(T_1) < 0)$

$$= P(a + rT_1 - C_1 < 0)$$

$$= P(L_1 > a) = 1 - F_1(a)$$

$$P(K_a(T_1) < 0) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{r+c} e^{a/r} & \text{si } a \leq 0 \\ \frac{c}{r+c} e^{-a/c} & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Rqne: le 1^{er} ministre arrive au temps T_1 , la société est en défaut si son capital est négatif:

$$K_a(T_1) < 0 \Leftrightarrow a + rT_1 - C_1 < 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 capital de $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 défaut $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 tant des $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 prêts à l'instant T_1 $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 coût du 1^{er} ministre.

$$3. I_2 = \mathbb{Q} - \pi \Delta_2.$$

(a) $\forall h > 0,$

$$g(x+h) - g(x) = P([I_1 \leq x+h] \cap [I_1 + I_2 \leq a]) \\ - P([I_1 \leq x] \cap [I_1 + I_2 \leq a])$$

$$= P([x < I_1 \leq x+h] \cap [I_1 + I_2 \leq a])$$

$$= P([x < I_1 \leq x+h] \cap [I_2 \leq a - I_1])$$

• Si $[x < I_1 \leq x+h] \cap [I_2 \leq a - I_1]$ réalise alors
 $-x+h \leq -I_1 \leq -x \Rightarrow a-x+h \leq a-I_1 \leq a-x$

$$\text{dans } [x < I_1 \leq x+h] \cap [I_2 \leq a - I_1]$$

$$\subset [x < I_1 \leq x+h] \cap [I_2 \leq a - x]$$

dans

$$|g(x+h) - g(x)| \leq P(x < I_1 \leq x+h) \cdot P(I_2 \leq a - x)$$

car I_1 et I_2 indépendantes (condition) (2^{ème} inégalité)

• Si $[x < I_1 \leq x+h] \cap [I_2 \leq a - x - h]$
 réalise alors $I_1 + I_2 \leq x+h + I_2 \leq a$

dans

$$[x < I_1 \leq x+h] \cap [I_1 + I_2 \leq a] \text{ réalise.}$$

TH (5)

$$P([x < I_1 \leq x+h] \cap [I_2 \leq a - x - h]) \\ \leq P([x < I_1 \leq x+h] \cap [I_1 + I_2 \leq a])$$

D'ici (I_1 et I_2 indep.):

$$P(x < I_1 \leq x+h) \cdot P(I_2 \leq a - x - h) \leq g(x+h) - g(x) \\ \text{(1^{ère} inégalité)}$$

(b) D'ici $\forall h > 0,$

$$\frac{F_{I_1}(x+h) - F_{I_1}(x)}{h} \times F_{I_2}(a - x - h)$$

$$\leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\leq \frac{F_{I_1}(x+h) - F_{I_1}(x)}{h} \times F_{I_2}(a - x)$$

D'ici en passant à la limite et par encadrement

$$F_{I_1}'(x) \times F_{I_2}(a - x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

(car F_{I_1} dérivable en x et $F_{I_2} = F_{I_1}$ continue sur $\mathbb{R}$)

$$\text{Dans } \underline{g'(x) = f(x) \times F(a - x)}$$

(*) Même lorsque $x = 0$
 car $F_a'(0) = F_g'(0) = \frac{1}{n!}$
 etc

On admet que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x) \times F(a - x)$

4. (a)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n < l_1 \leq a] = [l_1 \leq a]$$

D'au

$$[l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([-n < l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a])$$

Comme $([-n < l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a])$ est une suite croissante d'événements, par limite monotone:

$$P([l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P([-n < l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a])$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P([-n < l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a])$$

$$= P([-n < l_1 \leq a] \cap [l_2 \leq a - l_1])$$

$$= P([l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a]) - P([l_1 \leq -n] \cap [l_1 + l_2 \leq a])$$

$$= g(a) - g(-n) \quad \text{par définition de } g$$

$$= \int_{-n}^a g'(x) dx = \int_{-n}^a f(x) F(a-x) dx$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} P([-n < l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a]) = P([l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a])$$

(limite finie), l'intégrale $\int_{-\infty}^a f(x) F(a-x) dx$ converge et

$$P([l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a]) = \int_{-\infty}^a f(x) F(a-x) dx$$

$$\begin{aligned} (c) \quad K_a(T_1) &= a + \pi T_1 - C_1 \\ K_a(T_2) &= a + \pi T_2 - C_1 - C_2 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} l_1 + l_2 &= C_1 - \pi \Delta_1 \\ &+ C_2 - \pi \Delta_2 \\ &= C_1 + C_2 - \pi T_2 \end{aligned} \right.$$

Donc

$$[K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0]$$

$$= [a - l_1 < 0] \cup [a - (l_1 + l_2) < 0]$$

$$= [l_1 > a] \cup [l_1 + l_2 > a] \quad \textcircled{*}$$

D'au

$$[K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0] = [l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a]$$

et

$$P([K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0]) = 1 - P([l_1 \leq a] \cap [l_1 + l_2 \leq a])$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^a f(x) F(a-x) dx$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^a f(x) \cdot P(l_2 \leq a-x) dx \quad \text{car } l_2 \text{ et } l_1 \text{ ont la même loi}$$

$$P([K_a(T_1) < 0] \cup [K_a(T_2) < 0]) = P$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^a f(x) \cdot (1 - P(L_2 > a - x)) dx$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_{-\infty}^a f(x) \cdot P(L_2 > a - x) dx$$

$$= P(L_1 > a) + \int_{-\infty}^a f(x) \cdot P(L_2 > a - x) dx$$

5. On suppose $a \geq 0$.

$$P = (1 - F(a)) + \int_{-\infty}^a f(x) \cdot (1 - F(a - x)) dx$$

$$= \frac{c}{\pi + c} e^{-a/c} + \left(\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi + c} e^{x/\pi} \cdot \left(\frac{c}{\pi + c} e^{-\frac{(a-x)}{c}} \right) dx \right. \\ \left. + \int_0^a \frac{1}{\pi + c} e^{-x/c} \cdot \frac{c}{\pi + c} \cdot e^{-\frac{(a-x)}{c}} dx \right)$$

$$= \frac{c}{\pi + c} e^{-a/c} + \frac{c}{(\pi + c)^2} \cdot \left[e^{-a/c} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{x(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{c})} dx \right. \\ \left. + e^{-a/c} \cdot \int_0^a e^{-x/c} dx \right]$$

$$= \frac{c}{c + \pi} e^{-a/c} \cdot \left[1 + \frac{1}{\pi + c} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{c}} + \frac{a}{\pi + c} \right] \quad \text{p. II (7)}$$

$$P = \frac{c}{c + \pi} e^{-a/c} \cdot \left[1 + \frac{\pi c}{(c + \pi)^2} + \frac{a}{\pi + c} \right]$$

On a donc calculé la probabilité P que la campagne soit en déficit après un an de deux sinistres.

III. Probabilité d'être en déficit au cours du temps:
deux premiers cas

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, avec $a \leq b$.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$K_a(T_n) = a + \pi T_n - \sum_{i=1}^n C_i \leq b + \pi T_n - \sum_{i=1}^n C_i = K_b(T_n)$$

Donc $\pi K_b(T_n) < 0$ alors $K_a(T_n) < 0$

d'où $[K_b(T_n) < 0] \subset [K_a(T_n) < 0]$

et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_b(T_n) < 0] \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} [K_a(T_n) < 0]$

donc $\pi(a) \leq \pi(b)$: la fonction π est
bien décroissante.

$$2. [K_a(T_n) < 0] \subset \bigcup_{n \geq 0} [K_a(T_n) < 0]$$

D'ici

$$\Pi(a) \geq \frac{c}{c+r} \left(1 + \frac{a}{c+r} + \frac{rc}{(c+r)^2} \right) e^{-a/c}$$

3. Généralisation du II. 4. (c) ? peu clair.

4. (a)

$$E(K_a(T_n)) = a + r E(T_n) - \sum_{i=1}^n E(C_i)$$

$$= a + r \cdot n - \sum_{i=1}^n c$$

$$= a + (r-c) \cdot n$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } r > c \\ a & \text{si } r = c \\ -\infty & \text{si } r < c \end{cases}$$

$$(b) V(K_a(T_n)) = V(r T_n - \sum_{i=1}^n C_i)$$

$$T_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

Comme $\Delta_1, \dots, \Delta_n, C_1, \dots, C_n$ indépendantes, par coalition

T_n et $C_1, \dots, C_n$ indépendantes.

$$V(K_a(T_n)) = r^2 V(T_n) + \sum_{i=1}^n V(C_i)$$

$$V(K_a(T_n)) = n r^2 + n \cdot c^2 = \underline{n(r^2 + c^2)}$$

VI (8)

$$S. \text{ Soit } n > \frac{a}{c-r} \text{ avec } \underline{c > r}$$

$$P(K_a(T_n) < 0) = P(K_a(T_n) - (a + (r-c) \cdot n) < -a + (r-c) \cdot n)$$

$$\text{Ici } n > \frac{a}{c-r} \text{ donc } (c-r)n > a \text{ car } c-r > 0$$

$$\Rightarrow -a - (r-c)n > 0$$

$$\text{IBT: } \forall \varepsilon > 0, P(|K_a(T_n) - E(K_a(T_n))| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(K_a(T_n))}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Ici: avec } \varepsilon = -a - (r-c)n > 0$$

$$\begin{aligned} P(K_a(T_n) - (a + (r-c)n) \geq -a - (r-c)n) \\ \leq P(|K_a(T_n) - (a + (r-c)n)| \geq -a - (r-c)n) \\ \leq \frac{n(r^2 + c^2)}{(-a - (r-c)n)^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'ici } P(K_a(T_n) < 0) = 1 - P(K_a(T_n) \geq 0)$$

$$= 1 - P(K_a(T_n) - (a + (r-c)n) \geq -a - (r-c)n) \text{ donc}$$

$$P(K_a(T_n) < 0) \geq 1 - \frac{n(c^2 + r^2)}{(a + nr - nc)^2}$$

$$(b) \text{ Comme } \frac{n(c^2+z^2)}{(a+nz-mc)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n(c^2+z^2)}{n^2(z-c)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{n(c^2+z^2)}{(a+nz-mc)^2} = 1 \text{ donc par encadrement}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(K_a(T_n) < 0) = 1$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, \pi(a) \geq P(K_a(T_n) < 0)$.

$$\text{Par encadrement: } \underline{\pi(a) = 1} \\ (\lim_{n \rightarrow +\infty})$$

Interprétation: $c > z$ et $K_a(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$:

les ministres l'emportent sur le montant des cotisations, et la campagne finit forcément par être en déficit.

6. Ici $c = z$ et $a \geq 0$

$$(a) K_a(T_n) = a + z \sum_{i=1}^n \Delta_i - \sum_{i=1}^n C_i \\ = a - \sum_{i=1}^n (C_i - z \Delta_i)$$

$$E(C_i - z \Delta_i) = E(C_i) - z E(\Delta_i) = c - z = 0$$

$$\text{et } V(C_i - z \Delta_i) = V(C_i) + z^2 V(\Delta_i) = c^2 + z^2 \quad (C_i, \Delta_i \text{ indep.})$$

D'après le TCL (Var indep.),

$$\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - z \Delta_i) - 0}{\sqrt{n(c^2+z^2)}} \xrightarrow{L} N_{a \in \mathbb{R}, 0, 1}$$

$$\text{car } V\left(\sum_{i=1}^n (C_i - z \Delta_i)\right) = n(c^2+z^2)$$

$$P(K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}) = P(K_a - a \leq y\sqrt{n})$$

$$= P\left(-\sum_{i=1}^n (C_i - z \Delta_i) \leq y\sqrt{n}\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^n (C_i - z \Delta_i) \geq -y\sqrt{n}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - z \Delta_i)}{\sqrt{n(c^2+z^2)}} \geq -\frac{y}{\sqrt{c^2+z^2}}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(N \geq -\frac{y}{\sqrt{c^2+z^2}}) = 1 - P(N < -\frac{y}{\sqrt{c^2+z^2}})$$

$$= 1 - (1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{c^2+z^2}}\right))$$

$$= \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{c^2+z^2}}\right) \quad \text{avec } c = z \text{ ici.}$$

(b) Soit $y > 0$. Alors on a $a - y\sqrt{n} < 0 < a + y\sqrt{n}$
d'où

$$[K_a(T_n) \leq a - y\sqrt{n}] \subset [K_a(T_n) < 0] \subset [K_a(T_n) \leq a + y\sqrt{n}]$$

D'ici pour n assez grand:

$$P(K_n(T_n) \leq a - y\sqrt{n}) \leq P(K_n(T_n) < 0) \leq P(K_n(T_n) \leq a + y\sqrt{n})$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} P(K_n(T_n) \leq a + y\sqrt{n}) = \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}c}\right).$$

et on maintiendrait de même que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(K_n(T_n) \leq a - y\sqrt{n}) = \Phi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}c}\right).$$

D'ici

$$\underbrace{P(K_n(T_n) \leq a - y\sqrt{n})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}c}\right)} \leq P(K_n(T_n) < 0) \leq \underbrace{P(K_n(T_n) \leq a + y\sqrt{n})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}c}\right)}$$

Mais attention, on ne sait pas si $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(K_n(T_n) < 0)$ existe !!

Soit $\varepsilon > 0$. Comme Φ continue en 0, $\lim_{y \rightarrow 0} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}c}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$

$\exists y_1 > 0 / \forall y \in]0; y_1[$,

$$\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}c}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

et $\exists y_2 > 0 / \forall y \in]0; y_2[$,

$$\Phi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}c}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$

10

Puis: $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N$,

$$P(K_n(T_n) \leq a - y\sqrt{n}) \geq \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}c}\right) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P(K_n(T_n) \leq a + y\sqrt{n}) \leq \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}c}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'ici: $(\forall y \in]0; \min(y_1, y_2)[,) \forall n \geq N$,

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq P(K_n(T_n) < 0) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Par définition de la limite, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(K_n(T_n) < 0) = \frac{1}{2}$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi(a) \geq P(K_n(T_n) < 0)$

$$\text{d'ici } \boxed{\pi(a) \geq \frac{1}{2}}$$

la probabilité que la convergence finisse par être en défaut dans le cas "équilibre": $\pi = c$ est $\geq \frac{1}{2}$.

IV. Probabilité d'être en déficit au cours du temps:
le deuxième cas

Ici $c < r$ et $a \geq 0$; $S_n = \sum_{k=1}^n (c_k - r \Delta_k)$

1. (a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$H(n): \forall a \geq 0, \pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-a/c} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!(c+r)^k}$

• Si $n=0$: $\forall a \geq 0, P(K_1(T_1) < 0) = \frac{c}{c+r} e^{-a/c}$ (II.2.(c))
donc $H(0)$ vraie.

• Supposons $H(n)$ vraie et montrons $H(n+1)$.

On a admis au III.3. que

$$\pi(a) = P(L_1 > a) + \int_{-\infty}^a f(x) \cdot \pi(a-x) dx$$

D'où

$$\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-a/c} + \underbrace{\int_{-\infty}^a \frac{1}{c+r} e^{-x/c} \cdot \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a-x}{c}} \sum_{k=0}^n \frac{(a-x)^k}{k!(c+r)^k} dx}_{\geq 0}$$

II (11)
 $+ \int_0^a \frac{1}{c+r} e^{-x/c} \cdot \frac{c}{c+r} e^{-\frac{a-x}{c}} \sum_{k=0}^n \frac{(a-x)^k}{k!(c+r)^k} dx$

$$\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-a/c} + \frac{c}{(c+r)^2} \cdot e^{-\frac{a}{c}} \sum_{k=0}^n \int_0^a \frac{(a-x)^k}{k!(c+r)^k} dx$$

(on ne garde que la 2^{ème} intégrale)

$$\pi(a) \geq \frac{c}{c+r} e^{-a/c} + \frac{c}{(c+r)^2} \cdot e^{-\frac{a}{c}} \sum_{k=0}^n \frac{a^{k+1}}{(k+1)!(c+r)^{k+1}}$$

calcul fait
 $\geq \frac{c}{c+r} e^{-a/c} + \frac{c}{c+r} \cdot e^{-a/c} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a^i}{i!(c+r)^i}$

$$\geq \frac{c}{c+r} \cdot e^{-a/c} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a^k}{k!(c+r)^k}$$

donc $H(n+1)$ vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$ vraie.

Quf !! pas facile + il fallait se rappeler du III.3...

(b) Question plus facile par de repérer un peu!

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{c+n} e^{-a/c} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!(c+n)^k} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{c+n} e^{-a/c} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{a}{c+n}\right)^k}{k!} \\ = \frac{c}{c+n} e^{-a/c} \cdot e^{\frac{a}{c+n}} \quad (\text{série exponentielle}) \\ = \frac{c}{c+n} \cdot e^{\frac{-a(c+n)+ac}{c(c+n)}} = \frac{c}{c+n} \cdot e^{\frac{-a n}{c(c+n)}} \end{aligned}$$

D'ici en passant à la limite dans la question précédente:

$$\boxed{\pi(a) \geq \frac{c}{c+n} e^{\frac{-a n}{c(c+n)}} > 0}$$

On obtient ainsi une minoration sur la probabilité que la compagnie soit en déficit au cours du temps.

2. (a) Soit λ , $0 < \lambda < \frac{1}{c}$.

Sous réserve de convergence, d'après le th. de transfert,

$$E(\exp(\lambda L_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} f_{L_1}(x) dx$$

$$E(\exp(\lambda L_1)) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} \cdot \frac{1}{n+c} e^{x/2} dx + \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \cdot \frac{1}{n+c} e^{-x/c} dx \quad (12)$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{n+c} \int_{-\infty}^0 e^{(2+\frac{1}{2})x} dx + \frac{1}{n+c} \int_0^{+\infty} e^{-x(\frac{1}{c}-2)} dx \\ \text{cavage bien!} \\ = \frac{1}{n+c} \int_{u=-\infty}^0 e^{-(2+\frac{1}{2})u} du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+c} \cdot \frac{1}{2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+c} \cdot \frac{1}{\frac{1}{c}-2}$$

$$= \frac{n}{n+c} \cdot \frac{1}{2+\frac{1}{2}} + \frac{c}{n+c} \cdot \frac{1}{1-2c}$$

$$= \frac{n(1-2c) + c(1+2n)}{(n+c)(1+2n)(1-2c)} = \frac{n+c}{(n+c)(1+2n)(1-2c)}$$

d'ici

$$\boxed{E(\exp(\lambda L_1)) = \frac{1}{(1+2n)(1-2c)}}$$

(b)

$$E(\exp(\lambda S_n)) = E\left(\prod_{k=1}^n \exp(\lambda L_k)\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à l.k. indep.} \\ \text{même loi} \\ \text{que } L_1 \end{array} \right.$$

$$E(\exp(2S_n)) = \prod_{a=1}^n E(\exp(2I_a))$$

$$= \frac{1}{(1+2\pi)^n (1-2c)^n}$$

3. (a) S_n est somme de variables admettant une espérance et une variance, donc S_n admet une espérance et une variance.

$$P(S_n > a) = P(e^{2S_n} > e^{2a})$$

$$\leq \frac{E(e^{2S_n})}{e^{2a}} = e^{-2a} \cdot E(\exp(2S_n))$$

Markov

(b) Soit $\lambda \in]0; \frac{1}{c} - \frac{1}{2}[$.

$$0 < \lambda < \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \lambda < \frac{\pi - c}{\pi c} \Rightarrow 0 < 2\pi c < \pi - c$$

$$\begin{aligned} (1+2\pi)(1-2c) &= 1 + 2(\pi - c) - 2^2\pi c \\ &= 1 + 2 \underbrace{(-2\pi c + (\pi - c))}_{>0} \\ &> 1 \end{aligned}$$

Donc la série de t-y. $\left(\frac{1}{(1+2\pi)(1-2c)} \right)^n$ est convergente.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n > a]\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n > a) \quad (\text{classique})$$

(il marche par récurrence)

$$\leq e^{-2a} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} E(\exp(2S_n))$$

$$\leq e^{-2a} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+2\pi)^n (1-2c)^n}$$

$$4. K_a(T_n) = a - S_n$$

$$\text{D'où } \Pi(a) = P\left(\bigcup_{a=0}^{+\infty} (K_a(T_n) < 0)\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [S_n > a]\right)$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-2a} = 0 \text{ donc } \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-2a} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+2\pi)^n (1-2c)^n}}_{\text{constant par rapport à } a} = 0$$

Par encadrement avec le 3.,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \Pi(a) = 0$$

Assz logique: si la compagnie a un capital initial très important et que le montant des primes cause les risques, peu de chance qu'elle soit en déficit.

• On applique le 3. (b) avec μ tel $0 < \mu < \frac{1}{c} - \frac{1}{2}$

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} [S_n > a]\right) \leq e^{-\mu a} \cdot C$$

où C indépendant de a

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\mu a} \cdot C}{e^{-2a}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-(\mu-2)a} \cdot C = 0 \quad \text{car } \mu-2 > 0$$

Donc pour a assez grand : $\frac{e^{-\mu a} \cdot C}{e^{-2a}} \leq 1$
 $\Rightarrow e^{-\mu a} \cdot C \leq e^{-2a}$

Bilan : pour a assez grand, $\pi(a) \leq e^{-2a}$

Si (a) soit ψ continue sur $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en $+\infty$.

Si $\psi \neq 0$, alors $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+ / \psi(x_0) \neq 0$. Par def. de la limite :

$$\exists A > 0 / \forall x \geq A, |\psi(x) - 0| \leq |\psi(x_0)| \Leftrightarrow |\psi(x)| \leq |\psi(x_0)|$$

Par ailleurs, $|\psi|$ est continue sur l'intervalle $[0, A]$

famé borné donc admet un maximum :

$$\exists \pi \in \mathbb{R}_+ / \pi = \max_{[0, A]} (|\psi|)$$

$$\text{Notons } \pi' = \max(|\psi(x_0)|, \pi)$$

Alors π' est le maximum de $|\psi|$ sur $\mathbb{R}_+$

Si $\psi = 0$, il est évident que son maximum vaut 0. P. II (L4)

(b) la fonction $\pi_1 - \pi_2$ est continue et de limite nulle en $+\infty$, donc admet un maximum π atteint en $a_0 \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} |\pi_1(a) - \pi_2(a)| &= \left| \int_{-\infty}^a f(x) \cdot (\pi_1(a-x) - \pi_2(a-x)) dx \right| \\ &\leq \pi \cdot \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad (f(x) \geq 0) \\ &\leq \pi \cdot F(a) \end{aligned}$$

D'ici pour $a = a_0$: $|\pi_1(a_0) - \pi_2(a_0)| \leq \pi \cdot F(a_0)$

$$\Leftrightarrow \pi \leq \pi \cdot F(a_0)$$

Attention!!

D'ici comme $F(a) < 1$ car $F(a) = 1 - \frac{c}{a+c} e^{-a/c}$,

$\pi = 0$. Donc $\pi_1 - \pi_2 = 0$ et $\pi_1 = \pi_2$

(c) Notons, $\forall a \geq 0$,

$$\pi_2(a) = \frac{c}{2} e^{-a(\frac{1}{c} - \frac{1}{2})}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 P(L_1 > a) &+ \int_{-\infty}^a f(x) \pi_2(a-x) dx \\
 &= \frac{c}{n+c} e^{-a/c} + \int_{-\infty}^0 f(x) \pi_2(a-x) dx + \int_0^a f(x) \pi_2(a-x) dx \\
 &= \frac{c}{n+c} e^{-a/c} + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{n+c} e^{x/c} \cdot \frac{c}{n} e^{-a(x)(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} dx \\
 &\quad + \int_0^a \frac{1}{n+c} e^{-x/c} \cdot \frac{c}{n} e^{-a(x)(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} dx \quad (\text{valeurs de } F \text{ et de } f) \\
 &= \frac{c}{n+c} e^{-a/c} + \frac{c}{n(n+c)} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} \int_0^0 e^{\frac{x}{c}} dx \\
 &\quad + \frac{c}{n(n+c)} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} \int_0^a e^{-\frac{x}{n}} dx \\
 &= \frac{c}{n+c} e^{-a/c} + \frac{c}{n(n+c)} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} \left[\lim_{B \rightarrow -\infty} [c e^{x/c}]_B^0 + [-n e^{-\frac{x}{n}}]_0^a \right] \\
 &= \frac{c}{n+c} e^{-a/c} + \frac{c}{n(n+c)} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} (c - 0 - n e^{-a/n} + n) \\
 &= \frac{c}{n+c} e^{-a/c} + \frac{c}{n(n+c)} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} (n+c - n e^{-a/n})
 \end{aligned}$$

$$P(L_1 > a) + \int_{-\infty}^a f(x) \pi_2(a-x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c}{n+c} e^{-a/c} + \frac{c}{n} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} - \frac{c}{n+c} e^{-a/c} \\
 &= \frac{c}{n} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})} \\
 &= \pi_2(a)
 \end{aligned}$$

les fonctions π et π_2 sont continues sur $\mathbb{R}_+$, ont pour limites 0 en $+\infty$ et vérifient la relation du S. (b).

Elles sont égales donc $\pi = \pi_2$ et enfin

$$\text{Hazeo, } \pi(a) = \frac{c}{n} e^{-a(\frac{1}{c}-\frac{1}{n})}$$

Bilan: nous avons déterminé complètement la probabilité
pour la compagnie d'être en déficit au cours du temps,
dans le 3^{ème} cas qui est le plus intéressant
(les primes sont sensées couvrir les sinistres,
mais on est jamais à l'abri d'une catastrophe!).
Notons que l'a nous donne la formule dans cette
dernière question...