

EXERCICES - VARIABLES A DENSITÉ

Exercice 1

1.

* F est continue sur $] -\infty; 1[$ et $] 1; +\infty[$ (fonctions usuelles).

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 1 - e^0 = 0 = F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$$

donc F est continue en 1.

F est continue sur $\mathbb{R}$.

* F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

(fonctions usuelles)

$$* \forall x > 1, F'(x) = -(-2) \cdot e^{2-2x} = 2e^{2-2x} > 0$$

Donc F est croissante sur $] 1; +\infty[$.

Etant constante sur $] -\infty; 1[$ et continue en 1,

F est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-2x} = 0$$

Finalement,

F est une fonction de répartition d'une variable à densité.

VAR DENSITÉ (2)

Soit X une VARR de fonction de répartition F .

$$2. P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-2}$$

$$P(X > -2) = 1 - F(-2) = 1 \text{ car } F(-2) = 0$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq 3\right) = F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F(3) \text{ car } F\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = 1 - e^{-4}$$

$$P_{[X \leq 5]}(X \leq 3) = \frac{P((X \leq 3) \cap (X \leq 5))}{P(X \leq 5)} = \frac{P(X \leq 3)}{P(X \leq 5)} = \frac{1 - e^{-4}}{1 - e^{-8}}$$

3.

* $X(\Omega) = [2; +\infty[$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Y est donc une variable discrète.

$$\begin{aligned} * \forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y = k) &= P(LX = k) \\ &= P(k \leq X < k+1) \\ &= P(k \leq X \leq k+1) \text{ car } X \text{ à densité} \\ &= F(k+1) - F(k) \\ &= (1 - e^{2-2k-2}) - (1 - e^{2-2k}) \\ &= e^{2-2k}(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y=k) = (1 - e^{-2}) \cdot (e^{-2})^{k-1}$$

Donc $Y \hookrightarrow Y(1 - e^{-2})$

$$4. Z = X - LX$$

$$Z(\mathbb{R}) = [0, 1[$$

• Si $x < 0$, $F_Z(x) = 0$ • Si $x \geq 1$, $F_Z(x) = 1$

• Soit $x \in [0, 1[$.

$$[Z \leq x] = [X - LX \leq x]$$

$$= \bigcup_{k=1}^{+\infty} [kX \leq k+x]$$

$\mathcal{D}'_{in}$

$$F_Z(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x) \text{ car événements incompatibles à } \mathbb{Z}.$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} F(k+x) - F(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} [(1 - e^{2-2k-2x}) - (1 - e^{2-2k})]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{2-2k} \cdot (1 - e^{-2x})$$

$$= (1 - e^{-2x}) \cdot e^2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-2})^k$$

$$F_Z(x) = (1 - e^{-2x}) \cdot e^2 \cdot e^2 \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} (e^{-2})^i$$

$$= (1 - e^{-2x}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-2}} \text{ (série géométrique avec } |e^{-2}| < 1)$$

$$F_Z(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2}}$$

Vérification: $\lim_{x \rightarrow 1^-} F_Z(x) = \frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-2}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_Z(x) = \frac{1 - 1}{1 - e^{-2}} = 0$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R},$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 2

1. f est positive

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx \text{ . Soit } A < 0.$$

$$\int_A^0 e^x dx = [e^x]_A^0 = 1 - e^A \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} 1.$$

Ex. 2 (suite)

Donc $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ converge et $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = 1$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Bilan: f est une densité de probabilité.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $X(\mathbb{R}) =]-\infty; 0]$

dans si $x \geq 0$, $F_X(x) = 1$.

Si $x < 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x e^t dt$.

Soit $A \in]-\infty, x]$.

$$\int_A^x e^t dt = [e^t]_A^x = e^x - e^A \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} e^x$$

donc $F_X(x) = e^x$.

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3. X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t e^t dt.$$

VAR DENSITÉ (3)

$\forall t < 0, t e^t < 0$.

Il suffit de montrer que cette intégrale converge.

Soit $A < 0$. Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$
 u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par I.P.P.

$$\begin{aligned} \int_A^0 t e^t dt &= [t e^t]_A^0 - \int_A^0 e^t dt \\ &= -A e^A - \int_A^0 e^t dt \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow -\infty} - \int_{-\infty}^0 e^t dt = -1 \text{ d'après le 2.}$$

Donc $E(X)$ existe et $E(X) = -1$.

Autre méthode:

(1) Posons $u = -t$. (2) $t \mapsto -t \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(3) $\begin{cases} t=0 \\ t=-\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=+\infty \end{cases}$ (4) $du = -dt$

(5) $t e^t dt = +u e^{-u} du$ (6) $u \mapsto u e^{-u}$ continue sur $\mathbb{R}$.

Par C.D.V., $\int_{-\infty}^0 t e^t dt$ est de même nature que

$$\int_{+\infty}^0 u e^{-u} du = - \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = -I(1) = -1.$$

Donc $E(X)$ existe et $E(X) = -1$

(4) * Montrons que $E(X^2)$ existe.

$E(X^2)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est (absolument) convergente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 e^t dt$$

En posant $u = -t$ comme dans le (3), on trouve que

$$\int_{-\infty}^0 t^2 e^t dt = - \int_{+\infty}^0 u^2 e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = I'(3) = 2$$

Donc $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = 2$.

* Comme $E(X)$ existe, $V(X)$ existe. Par la formule de Koenig - Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 1 = 1$.

(5) $Y = X^2$

(a) $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

* $\forall x < 0, F_Y(x) = 0$

* $\forall x \geq 0, F_Y(x) = P(Y \leq x)$

$$\begin{aligned} &= P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \\ &= 1 - e^{-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R},$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

VAR DENSITÉ (6)

(b)

* F_Y est continue sur $]-\infty; 0[$, sur $]0; +\infty[$ et en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = 1 - e^{-0} = 0 = F_Y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x)$

* F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Bilan: Y est une variable à densité.

* $\forall x < 0, f_Y(x) = 0$

$\forall x > 0, f_Y(x) = + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$ si $x > 0$.

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R},$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est une densité de Y .

(c) $Z = 2X + 1$.

$Z(\Omega) =]-\infty; 1]$.

* $\forall x \geq 1, F_Z(x) = 1$

$$\begin{aligned} &\forall x < 1, F_Z(x) = P(2X + 1 \leq x) \\ &= P(X \leq \frac{x-1}{2}) \text{ si } \frac{x-1}{2} < 0 \\ &= e^{\frac{x-1}{2}} \end{aligned}$$

Ex-2 (suite)

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Bilan: } F_Z(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{2}} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

• F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

• F_Z est continue sur $]-\infty; 1[$, sur $]1; +\infty[$ et

en 1 car:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_Z(x) = e^0 = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_Z(x) = F_Z(1)$$

Donc F_Z continue sur $\mathbb{R}$.

Bilan: Z est une variable à densité.

Une densité de Z est:

$$f_Z: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x-1}{2}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 3: la loi de Cauchy

1. On doit avoir $a \geq 0$ pour avoir $f(x) \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

• Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, $A < B$.

VAR DENSITÉ (5)

$$\int_A^B \frac{a}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{a}{\pi} [\text{Arctan}(x)]_A^B$$

$$= \frac{a}{\pi} (\text{Arctan}(B) - \text{Arctan}(A))$$

$$\xrightarrow[A \rightarrow -\infty]{B \rightarrow +\infty} \frac{a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = a$$

Donc si $a = 1$ ou a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ \bullet f \text{ positive} \\ \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \end{array} \right. \quad \text{donc } f \text{ est une densité de probabilité.}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Soit $A \in]-\infty; x]$.

$$\int_A^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(A).$$

$$\xrightarrow[A \rightarrow -\infty]{} \text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } F_x(x) = \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x)$

Vérification: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

(b) $P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{1}{2}$

$P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0)$

$= 1 - P(X \leq 0)$ car X à densité

$= \frac{1}{2}$

$P(X \leq -1) = F_X(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(-1)$

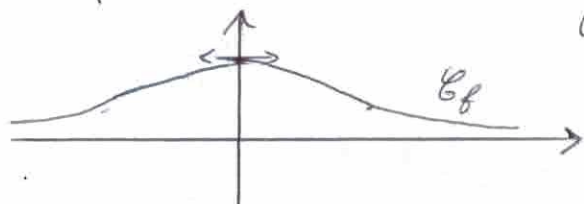
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1)$

$= 1 - P(X \leq 1)$ car X à densité

$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(1)\right) = 1 - \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{4}$



Loi de Cauchy

VAR DENSITÉ (6)

(c) X admet une espérance

si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument

si $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$ converge absolument

si $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{1+t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$ convergent (absolument)

* $\frac{t}{1+t^2} \sim \frac{1}{t}$ car $\int \frac{1}{t} dt$ diverge

(Riemann, $\alpha = 1$) par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int \frac{t}{1+t^2} dt$ diverge.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$ diverge aussi et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ diverge.

Bilan: si X suit la loi de Cauchy alors X n'admet pas d'espérance

3. (a) $Z \subset \mathbb{H} \left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$.

Soit $Y = \tan(Z)$.

$Y(Z) = \mathbb{R}$.

Ex-3 (suite)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(x) = P(Y \leq x)$$

$$= P(\tan Z \leq x)$$

$$= P(Z \leq \text{Arctan}(x)) \quad \text{par suite croissante de Arctan}$$

$$= F_Z(\text{Arctan}(x)).$$

Car comme $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Car comme $\text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a alors

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) = F_X(x) \text{ car } X \text{ suit la loi de Cauchy.}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = F_X(x)$

donc Y suit la loi de Cauchy

VAR DENSITÉ (7)

(b) le programme:

$$Z = \text{grand}(1, 1, 'unf', -\%pi/2, \%pi/2)$$

$$Y = \tan(Z)$$

permet donc de simuler la loi de Cauchy,

Exercice 4 : Transformation d'une loi uniforme

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([-3; 3]) \text{ et } Y = X^2$$

1. Une densité de X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{1}{6} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction de répartition de X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{1}{6}(x+3) & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$E(X) = 0 \text{ et } V(X) = \frac{(3 - (-3))^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

(2) $Y(\Omega) = [0, 9]$.

Donc: $\forall x < 0, F_Y(x) = 0$ et $\forall x > 9, F_Y(x) = 1$.

Soit $x \in [0, 9]$.

$$F_Y(x) = P(X^2 \leq x)$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$$= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{x} + 3) - \frac{1}{6}(-\sqrt{x} + 3)$$

$$= \frac{2}{6}\sqrt{x} = \frac{1}{3}\sqrt{x}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R},$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 9 \\ 1 & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

3. $X = \text{grand}(1, 1, 'unf', -3, 3)$

$$Y = X^2$$

Exercice 5

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([-2, 3]). \quad Y = -4X + 7$$

VAR DENSITÉ

(8)

1. Une densité de X

$$f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{5}x & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

la fonction de répartition de X

$$F_X: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{5}(2+x) & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E(X) = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad V(X) =$$

2. $Y = f(X)$ où $f: x \mapsto -4x + 7$.

f étant continue strict. décroissante sur $[-2; 3]$ elle est bijective de $[-2; 3]$ sur $[-5; 15]$. $Y(\Omega) = [-5; 15]$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \text{ si } x < -5, F_Y(x) = 0 \quad \bullet \text{ si } x \geq 15, F_Y(x) = 1$$

$$\bullet \text{ si } -5 \leq x \leq 15,$$

$$F_Y(x) = P(-4X + 7 \leq x) = P(-4X \leq x - 7)$$

$$= P\left(X \geq -\frac{x-7}{4}\right) \quad \boxed{\Delta} \text{ Division par } -4 < 0$$

Ex-6 (suite)

$$F_Y(x) = P(X \geq \frac{7-x}{4})$$

$$= 1 - P(X < \frac{7-x}{4})$$

$$= 1 - P(X \leq \frac{7-x}{4}) \text{ car } X \text{ est à densité}$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{7-x}{4}\right) \text{ car } \frac{7-x}{4} \in [-2; 3]$$

$$= 1 - \frac{1}{5} \left(2 + \frac{7-x}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{15-x}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{x}{20}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x}{20}$$

++ rapide
stabilité loi uniforme
par transformation
affine

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R},$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -5 \\ \frac{x+5}{20} & \text{si } -5 \leq x \leq 15 \\ 1 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

$Y \in \mathcal{U}([-5; 15])$. Densité de Y :

$$f_Y: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -5 \\ \frac{1}{20} & \text{si } -5 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

VAR DENSITE (9)

Exercice 6

1. $X \in \mathcal{G}(\lambda)$. cf cours.

2. $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x < 0$, $F_Z(x) = 0$

• Si $x \geq 0$,

$$F_Z(x) = P(X \leq x) = P(0 \leq X \leq \sqrt{x}) \text{ car } X(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

$$= F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-2\sqrt{x}}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0.

F_Z est continue sur $] -\infty; 0[$, sur $] 0; +\infty[$

(fonction croissante) et en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_Z(x) = 1 - e^0 = 0 = F_Z(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_Z(x)$

Donc Z est une variable à densité.

Une densité de Z est: $\forall x \in \mathbb{R},$

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 7 : une loi petit gamma

$$X \subset \mathcal{Y}(x_0).$$

$$1. Y = \ln(X)$$

$X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc Y est définie presque sûrement.

$$Y(\Omega) = \mathbb{R}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$F_Y(x) = P(\ln(X) \leq x)$$

$$= P(X \leq e^x) \text{ par croissance stricte de exp}$$

$$= \frac{1}{I'(x_0)} \int_0^{e^x} t^g \cdot e^{-t} dt$$

Notons $g: t \mapsto t^g \cdot e^{-t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_Y(x) = \frac{1}{I'(x_0)} \cdot (G(e^x) - G(0))$$

Par composition, $x \mapsto G(e^x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent Y est une VAR à densité.

VAR DENSITÉ (10)

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$f_Y'(x) = \frac{1}{I'(x_0)} \cdot (G'(e^x) \times e^x)$$

$$= \frac{1}{I'(x_0)} \cdot (e^x)^g e^{-e^x} \times e^x$$

$$= \frac{1}{g!} \cdot e^{x_0 \cdot x} \cdot e^{-e^x}$$

Bilan: une densité de Y est:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{g!} e^{x_0 \cdot x} \cdot e^{-e^x}$$

$$2. Z = |Y| \text{ alors } Z(\Omega) = \mathbb{R}_+.$$

$$\bullet \text{ Si } x < 0, F_Z(x) = 0.$$

$$\bullet \text{ Si } x \geq 0,$$

$$F_Z(x) = P(|Y| \leq x) = P(-x \leq Y \leq x)$$

$$= F_Y(x) - F_Y(-x)$$

$$= \frac{1}{I'(x_0)} (G(e^x) - G(0)) - \frac{1}{I'(x_0)} (G(e^{-x}) - G(0))$$

$$= \frac{1}{I'(x_0)} (G(e^x) - G(e^{-x}))$$

$$= \frac{1}{g!} e^{x_0 \cdot x} \int_{e^{-x}}^{e^x} t^g e^{-t} dt$$

On voit facilement que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$,
de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Donc Z est à densité et une densité de Z est

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{g!} \cdot e^x (e^{gx} e^{-x}) + \frac{1}{g!} \cdot e^{-x} \cdot e^{-gx} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{g!} (e^{(g+1)x} e^{-x} + e^{-x} e^{-(g+1)x}) \quad \text{si } x > 0$$

Exercice 8 : loi petit gamma

$X \hookrightarrow \gamma(\mu)$ où $\mu > 0$.

1. X admet un moment d'ordre n ssi l'intégrale

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt$ converge (absolument).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = \frac{1}{I(\mu)} \cdot \int_0^{+\infty} t^n \cdot t^{\mu-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{I(\mu)} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{(n+\mu)-1} \cdot e^{-t} dt}_{\text{converge et vaut } I(n+\mu)}$$

VAR DENSITÉ

(11)

Donc $E(X^n)$ existe et

$$E(X^n) = \frac{1}{I(\mu)} \cdot I'(n+\mu)$$

$$= (n+\mu) I'(n+\mu-1)$$

$$= (n+\mu)(n+\mu-1) \dots (\mu+1) \cdot \frac{I'(\mu)}{I(\mu)}$$

$$E(X^n) = \prod_{k=1}^n (k+\mu)$$

Rappel : $\forall x > 0$
 $I'(n+1) = (n+1) I'(n)$

2. $Y = e^X$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a $Y(\Omega) = [1, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x < 1$ alors $F_Y(x) = 0$

• Si $x \geq 1$ alors

$$F_Y(x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x))$$

$$= F_X(\ln(x)).$$

* Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$, par composition

F_Y est continue sur $]1, +\infty[$. Elle est aussi continue

sur $] -\infty; 1[$ et en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_Y(x) = F_X(0) = 0$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} F_Y(x)$

* f_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

On en déduit que F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

Ainsi Y est à densité.

Une densité de Y est :

$$\text{si } x \leq 1, f_Y(x) = 0$$

$$\text{si } x > 1, f_Y(x) = F_Y'(x)$$

$$= \frac{1}{x} F_X'(\ln(x)) = \frac{1}{x} f_X(\ln(x))$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{I'(\mu)} \cdot (\ln(x))^{\mu-1} \cdot e^{-\ln(x)}$$

$$= \frac{1}{I'(\mu)} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (\ln(x))^{\mu-1}$$

(b) Y admet une espérance si l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt &= \frac{1}{I'(\mu)} \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{1}{x^2} (\ln(x))^{\mu-1} dx \\ &= \frac{1}{I'(\mu)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} (\ln(x))^{\mu-1} dx \end{aligned}$$

converge.

Soit $A > 1$.

$$\int_1^A \frac{1}{x} (\ln(x))^{\mu-1} dx = \left[\frac{1}{\mu} (\ln(x))^\mu \right]_1^A$$

car $\mu > 0$

$$= \frac{1}{\mu} (\ln(A))^\mu \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} (\ln(x))^{\mu-1} dx$ diverge.

Bilan : la variable Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 9 - lois normales

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 0.5)$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{0.5}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2 \cdot 0.5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1$

$$\text{Donc } I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Come $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 0.5)$, $V(X) = 0.5$.

Donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 0.5$.

Ainsi $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$

d'ici $\boxed{J = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

2. $K_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt$ à $\alpha > 0$
 $= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt.$

On considère $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\alpha})$. Alors X_1 a pour densité:
 $\forall t \in \mathbb{R}, f_{X_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\alpha} \cdot \sqrt{2\pi}}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2 \cdot \frac{1}{2\alpha}}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\alpha t^2}$
 $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\alpha t^2}.$

D'ici $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\alpha} \cdot e^{-\alpha x^2} dx = 1$
 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

et enfin

VAR DENSITÉ (13)

$\boxed{K_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$

$K_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-t} dt$
 $= \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; cf chapitre sur les intégrales
impropres
 (CDV $t = \frac{u^2}{2} dt \dots$)

$K_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2/3}}$

On considère $X_3 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$. X_3 a pour densité:

$\forall t \in \mathbb{R}, f_{X_3}(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2\pi}}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2 \cdot \frac{1}{3}}}$

D'ici $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2\pi}}} e^{-x^2/2/3} dx = 1$

et $\boxed{K_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2\pi}}$

3. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$, X et Y indépendantes.

On sait que $3X - 5Y$ suit aussi une loi normale d'après le th. de stabilité.

De plus $E(3X-5Y) = 3E(X) - 5E(Y)$
 $= 6 - 10 = -4$

et $V(3X-5Y) = V(3X+(-5)Y)$
 $= 3^2 \cdot V(X) + (-5)^2 V(Y)$
 $= 9 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{1}{2} = 34 \cdot \frac{1}{2} = 17$

Donc $3X-5Y \hookrightarrow \mathcal{N}(-4; 17)$

Exercice 10

X, Y indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Soit $t \in]0; +\infty[$.

* Déterminons la loi de $U = -tX$.

* $U(\Omega) =]-\infty; 0]$.

* Soit $x \leq 0$.

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) \\ &= P(-tX \leq x) = P(X \geq -\frac{x}{t}) \\ &= 1 - P(X < -\frac{x}{t}) \\ &= 1 - P(X \leq -\frac{x}{t}) \text{ car } X \text{ à densité} \\ &= 1 - (1 - e^{\frac{x}{t}}) \end{aligned}$$

VAR DENSITÉ $\mathbb{R}$

$$F_U(x) = e^{\frac{x}{t}}$$

* Si $x > 0$ alors $F_U(x) = P(U \leq x) = 1$ car $U(\Omega) = \mathbb{R}_-$.

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{t}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ (**)

* Les densités f_X et f_U sont bornées sur $\mathbb{R}$ donc $V = X + U = X - tX$ est à densité.

* $V(\Omega) = \mathbb{R}$

* Une densité de V est:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u) \cdot f_U(x-u) du$$

Or: * $f_Y(u) \neq 0$ si $u \geq 0$

* $f_U(x-u) \neq 0$ si $x-u \leq 0$ si $u \geq x$

1^{er} cas: si $x < 0$ alors $[0; +\infty[\cap]x; +\infty[=]x; +\infty[$

$$f_V(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot \frac{1}{t} e^{\frac{x-u}{t}} dt$$

(**) Une densité de U est: $f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{\frac{x}{t}} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ex-10 suite

Si $x < 0$ alors

$$f_V(x) = \frac{e^{x/t}}{t} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t+z}{t} \cdot u} du.$$

Soit une variable $W \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{t+z}{t}\right)$.

Alors $u \geq 0$, $f_W(u) = \frac{t+z}{t} e^{-\frac{t+z}{t} u}$

$$\text{et } \int_0^{+\infty} \frac{t+z}{t} e^{-\frac{t+z}{t} u} du = 1. \quad \text{D'ailleurs } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t+z}{t} u} du = \frac{t}{t+z}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{f_V(x) = \frac{e^{x/t}}{t+z}}$$

2^{ème} cas: si $x \geq 0$ alors $[0, +\infty[\cap [x, +\infty[= [x, +\infty[$.

$$f_V(x) = \frac{e^{x/t}}{t} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t+z}{t} u} du.$$

Posons $A > x$.

$$\begin{aligned} \int_x^A e^{-\frac{t+z}{t} u} du &= \left[-\frac{t}{t+z} e^{-\frac{t+z}{t} u} \right]_x^A \\ &= +\frac{t}{t+z} e^{-\frac{t+z}{t} x} - \frac{t}{t+z} e^{-\frac{t+z}{t} A} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{t}{t+z} e^{-\frac{t+z}{t} x} \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} f_V(x) &= \frac{e^{x/t}}{t} \cdot \frac{t}{t+z} e^{-\frac{t+z}{t} x} \\ &= \frac{1}{t+z} \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

VAR DENSITÉ (15)

Bilan: $V = Y - tX$ a pour densité : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_V(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+t} e^{x/t} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$2. \quad Z = \frac{Y}{X}$$

Tout d'abord, $P(X=0)=0$ donc Z est définie presque sûrement. $Z(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ donc $\forall t \leq 0$, $F_Z(t) = 0$.

Soit $t > 0$.

$$F_Z(t) = P\left(\frac{Y}{X} \leq t\right) = P(Y \leq tX)$$

$$= P(Y - tX \leq 0) = P(V \leq 0)$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t} e^{x/t} dx = \frac{1}{1+t} \int_{-\infty}^0 e^{x/t} dx.$$

Soit $A < 0$.

$$\int_A^0 e^{x/t} dx = \left[t e^{x/t} \right]_A^0 = t - t e^{A/t} \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} t$$

Si $t > 0$, $F_Z(t) = \frac{t}{1+t}$.

Bilan:

$$F_Z: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{1+t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

3. $T = \frac{X}{X+Y}$ - même méthode.

$T(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

$\forall t > 0$,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right)$$

$$= P(X \leq tX + tY)$$

$$= P(tY + (t-1)X \geq 0)$$

$$= P\left(Y + \left(1 - \frac{1}{t}\right)X \geq 0\right) \quad \text{car } t > 0$$

$$= P\left(Y - \frac{1-t}{t}X \geq 0\right)$$

2^e cas: si $t \geq 1$ alors $1-t \leq 0$

donc $-\frac{1-t}{t} > 0$ et $P\left(Y - \frac{1-t}{t}X \geq 0\right) = 1$

(événement certain car $(Y - \frac{1-t}{t}X)(\Omega) \in \mathbb{R}_+$)

2^e cas: si $0 < t \leq 1$ alors $\frac{1-t}{t} > 0$ et

$$\text{alors } P\left(Y - \frac{1-t}{t}X \geq 0\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1-t}{t} + x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{t}} dx = t \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = t$$

Bilan:

$$F_T: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Donc $\frac{X}{X+Y} \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.

Exercice 11: lois de min et de max.

1. $Z(\Omega) = [0;1]$.

Donc $\forall x < 0$, $F_Z(x) = 0$ et $\forall x > 1$, $F_Z(x) = 1$.

Soit $x \in [0;1]$.

$$F_Z(x) = P(\min(X,Y) \leq x) = P([X \leq x] \cap [Y \leq x])$$

$$= P(X \leq x) \cdot P(Y \leq x) \text{ par indépendance}$$

$$= x^2$$

Bilan: $F_Z: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Une densité:

$f_Z: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$, indépendantes.

$T = \min(X, Y)$.

$T(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc $\forall x < 0$, $F_T(x) = 0$.

• Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} F_T(x) &= P(\min(X, Y) \leq x) = 1 - P(\min(X, Y) > x) \\ &= 1 - P([X > x] \cap [Y > x]) \\ &= 1 - (P(X > x) \cdot P(Y > x)) \text{ par indépendance} \\ &= 1 - ((1 - F_X(x)) \cdot (1 - F_Y(x))) \\ &= 1 - [(1 - (1 - e^{-ax})) \cdot (1 - (1 - e^{-bx}))] \\ &= 1 - e^{-(a+b)x} \end{aligned}$$

VAR DENSITÉ (17)

Bilan: • $T(\Omega) = \mathbb{R}_+$

• $F_T: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Donc $\min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{E}(a+b)$

Exercice 12

1. (a)

$P(|X - 0,96| < 0,54)$

$= P(0,96 - 0,54 < X < 0,96 + 0,54)$

$= P(0,42 < X < 1,5)$

$= \Phi(1,5) - \Phi(0,42) \approx 0,9332 - 0,6628$

$\approx 0,2704$

(b) $P(|X| < t) = 0,95$

$\Leftrightarrow P(-t < X < t) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi(t) - \Phi(-t) = 0,95$

$\Leftrightarrow 2\Phi(t) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Phi(t) = \frac{1,95}{2} = 0,975$

$\Leftrightarrow t \approx 1,96$

2. $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(|X| \leq x) &= P(-x \leq X \leq x) \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) \\ &= 2\Phi(x) - 1 \end{aligned}$$

3. $Y = |X|$

(a) $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$F_Y(x) = P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1.$$

la fonction Φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F_Y est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
De plus F_Y est continue en 0, donc continue sur $\mathbb{R}$.
Donc Y est à densité et admet une densité.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, f_Y(x) &= 2\Phi'(x) = 2\varphi(x) \text{ et } f_Y(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

(b) Sous réserve de convergence,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$E(Y)^A = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^A$$

VAR DENSITÉ (18)

$$\begin{aligned} E(Y)^A &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Donc Y admet une espérance et $E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(b) $Z = X^2$.

• $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Donc $\forall x < 0$, $F_Z(x) = 0$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(X^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Bilan: } F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• Comme $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, par composition F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Donc F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

• De plus F_Z est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = 2\Phi(0) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

Ainsi F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et Z est une variable à densité.

Z admet une densité

$$f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$$

Soit $T = e^X$.

(a) $T(X) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F_T(x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x)) = \Phi(\ln(x))$$

Ainsi $F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc F_T est $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(\ln(x)) = 0$ donc F_T continue en 0.

Ainsi F_T continue sur $\mathbb{R}$.

Bilan: Test une variable à densité

T admet une densité:

VAR DENSITÉ

(18)

$$\forall x > 0, f_T(x) = \frac{1}{x} \Phi'(\ln(x)) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}}$$

$$f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) Sous réserve de convergence,

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_T(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} dx$$

(Cette intégrale est faiblement impropre en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{(\ln(x))^2}{2} = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} = 0$)

(1) Posons $u = \ln(x)$

(2) $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $] 0, +\infty[$, bijective de $] 0, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

(3) Bornes $\begin{cases} x = +\infty \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = +\infty \\ u = -\infty \end{cases}$

(4) $x = e^u$ donc $dx = e^u du$

(5) $e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} dx = e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^u du$
 $= e^{-\frac{u^2}{2} + u} du$

(6) $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2} + u}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par CDV, $I = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} dx$ est de même nature que $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + u} du$ et elles sont égales en

cas de convergence.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-1)^2}{2} + \frac{1}{2}} du = e^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-1)^2}{2}} du$$

Considérons une variable $U \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 1)$.

Alors U a pour densité

$$f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-1)^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$

VAR DENSITÉ (20)

Ainsi J converge, donc I

aussi et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} dx = e^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

Finalement, T admet une espérance et

$$E(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 13

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; \frac{1}{2})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Laquelle $E(X) = 0$ et $V(X) = \frac{1}{2}$, on a

$$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\text{D'où } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Erreur d'écriture.

Ex-13 (suite)

2. (a) * F est $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0

* F est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - e^{-x^2} = 0$

donc F continue sur $\mathbb{R}$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

* $\forall x > 0$, $F'(x) = 2x e^{-x^2} > 0$

donc F strict-croissante sur $\mathbb{R}_+$. Etant aussi croissante sur $\mathbb{R}_-$ et continue en 0, F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Bilan: F est une fonction de répartition d'une variable à densité X. Cette variable a pour densité

$$f_X: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(b) i. Sans réserve de convergence,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \text{ par parité}$$

VAR DENSITE

21

$$E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ii. Soit $Y = X^2$.

* $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

* $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$F_Y(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

= $P(X \leq \sqrt{x})$ car X est à valeurs positives

$$= 1 - e^{-x}$$

$$\text{Ainsi } F_Y: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Donc $Y \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $E(X^2) = E(Y) = 1$

iii. X admet un moment d'ordre 2, donc une variance

$$\text{et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 14

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$\text{si (a) } \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{2} e^{-|-x|} = \frac{1}{2} e^{-|x|} = f(x)$$

(b) $\bullet$ f est positive, continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx \text{ par symétrie} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \text{ (car)} \end{aligned}$$

Donc f est une densité de probabilité.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\bullet$ 1^{er} cas: si $x \leq 0$ alors

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{-|t|} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^t dt$$

Soit $A \in]-\infty, x]$

$$\frac{1}{2} \int_A^x e^t dt = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^A \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^x$$

$$\text{Donc } F_Y(x) = \frac{1}{2} e^x.$$

$\bullet$ 2^{ème} cas: si $x \geq 0$ alors

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{-|t|} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^{-|t|} dt + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t} dt$$

$$F_Y(x) = F_Y(0) + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [-e^{-t}]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-x}.$$

$$\text{Bilan: } F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. $\bullet$ Puisque que Y admet une espérance, c'est-à-dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx$ converge absolument.

Comme $x \mapsto x f_Y(x)$ est impaire, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} x f_Y(x) dx$ converge.

Or $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \Gamma(2)$ converge donc $E(Y)$ existe.

Par impaireté de $x \mapsto x f_Y(x)$, $E(Y) = 0$.

$\bullet$ Puisque que $E(Y^2)$ existe, c'est-à-dire que

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x) dx$ converge. Comme $x \mapsto x^2 f_Y(x)$ est

paire, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} x^2 f_Y(x) dx$ converge.

$$\int_0^{+\infty} x^2 f_Y(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{2} \Gamma(3) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Donc $E(Y^2)$ existe et $E(Y^2) = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f_Y(x) = 2$ par suite.

Enfin, $V(Y)$ existe et

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2$$

4. Comme f est bornée, $Z_1 + Z_2$ est une variable à densité, avec une densité donnée par produit de convolution:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \\ f_{Z_1+Z_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1}(t) \cdot f_{Z_2}(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|t|} \cdot \frac{1}{2} e^{-|x-t|} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t| - |x-t|} dt \end{aligned}$$

$$|t| = \begin{cases} -t & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$|x-t| = \begin{cases} -xt & \text{si } t \geq x \\ x-t & \text{si } t < x \end{cases}$$

• Si $x > 0$,

$$f_{Z_1+Z_2}(x) = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-t-x+t} dt + \int_0^x e^{-t-x+t} dt + \int_x^{+\infty} e^{-t+x-t} dt \right)$$

VAR DENSITÉ (23)

$$f_{Z_1+Z_2}(x) = \frac{1}{4} \left(\underbrace{e^{-x}}_0 \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt + x e^{-x} + e^x \underbrace{\int_x^{+\infty} e^{-2t} dt}_x \right)$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_A^0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_x^{+\infty} e^{-2t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_x^A = \frac{1}{2} e^{-2x}$$

D'oi

$$\begin{aligned} f_{Z_1+Z_2}(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-x}}{2} + x e^{-x} + \frac{e^x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{-x} (1+x) \end{aligned}$$

• Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} f_{Z_1+Z_2}(x) &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^x e^{t-xt+t} dt + \int_x^0 e^{t+x-t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t+x-t} dt \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{2t} dt + (-x) \cdot e^x + e^x \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt \right) \\ \int_{-\infty}^x e^{2t} dt &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_A^x = \frac{1}{2} e^{2x} \\ \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^A = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Z_1+Z_2}(x) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^x - x e^x + \frac{1}{2} e^x \right) \\ &= \frac{1}{4} e^x (1-x) \end{aligned}$$

Bilan:

$$f_{Z_1+Z_2}: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x}(1+x) & \text{si } x \\ \frac{1}{4} e^x(1-x) & \text{si } x \end{cases}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

D'ailleurs: $\forall x \in \mathbb{R}, f_{Z_1+Z_2}(x) = \frac{1}{4} e^{-|x|} \cdot (1+|x|)$

5. $Z = |Y|$

(a) $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,$

$$F_Z(x) = P(|Y| \leq x)$$

$$= P(-x \leq Y \leq x)$$

$$= F_Y(x) - F_Y(-x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-x} - \left(\frac{1}{2} e^{-x} \right)$$

$$= 1 - e^{-x} \quad \text{si } x < 0$$

D'ailleurs $F_Z: x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(b) $Z \subset \mathcal{G}(1)$.

Ainsi $E(Z) = 1$ et $V(Z) = 1$

6. $T_1, T_2 \subset \mathcal{G}(1)$, indep.

VAR DENSITE (24)

(a) $(-T_2)(\Omega) \subset \mathbb{R}_-$

$\forall x \geq 0, F_{-T_2}(x) = 1$

$\forall x < 0,$

$$F_{-T_2}(x) = P(-T_2 \leq x)$$

$$= P(T_2 \geq -x)$$

$$= 1 - F_{T_2}(-x)$$

$$= 1 - (1 - e^{-(-x)})$$

$$= e^x$$

Bilan: $F_{-T_2}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

F_{-T_2} est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{G}^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Donc $-T_2$ est à densité et admet pour densité

$$f_{-T_2}: x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Comme f_{-T_2} est bornée, $T_1 - T_2 = T_1 + (-T_2)$ est une VAR à densité et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{T_1-T_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_1}(t) \cdot f_{-T_2}(x-t) dt$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{T_1}(t) \neq 0 \text{ si } t \geq 0 \\ f_{-T_2}(x-t) \neq 0 \text{ si } x-t \leq 0 \\ \text{si } t \geq x. \end{array} \right\} f_{T_1}(t) \times f_{-T_2}(x-t) \neq 0 \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} t \geq 0 \\ \text{et} \\ t \geq x \end{array} \right.$$

1^{er} cas: si $x < 0$,

$$\begin{aligned} f_{T_1-T_2}(x) &= \int_0^{+\infty} f_{T_1}(t) f_{-T_2}(x-t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{x-t} dt = e^x \cdot \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt \\ &= e^x \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{cf 4.}) \end{aligned}$$

2^{ème} cas: si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_{T_1-T_2}(x) &= \int_x^{+\infty} f_{T_1}(t) \cdot f_{-T_2}(x-t) dt \\ &= e^x \cdot \int_x^{+\infty} e^{-2t} dt = e^x \cdot \frac{1}{2} e^{-2x} = \frac{1}{2} e^{-x} \\ &\quad (\text{cf 4.}) \end{aligned}$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{T_1-T_2}(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

VAR DENSITÉ (25)

Dans $T_1 - T_2$ suit la loi exponentielle bilatérale et a la même loi que Y .

$$(c) E(T_1 - T_2) = E(T_1) - E(T_2) = 1 - 1 = 0$$

Dans $T_1 - T_2$ est centrée.

On aurait aussi pu dire que $E(T_1 - T_2) = E(Y) = 0$.

$$7. (a) \forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, F_Y'(x) = \frac{1}{2} e^x > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, F_Y'(x) = \frac{1}{2} e^{-x} > 0$$

F_Y est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$, $]0; +\infty[$ et continue en 0, donc F_Y est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Étant continue, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans

$$]\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Y(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} F_Y(x)[=]0; 1[.$$

(b) Fonction $y = F(x)$

if $x < 0$ then $y = 1/2 * \exp(x)$

else $y = 1 - 1/2 * \exp(-x)$

end
endfunction

$X = -2 : 0.01 : 2$

$y = \text{feval}(x, F)$
 $\text{plot2d}(x, y)$
 $\text{plot2d}(y, x)$