Corrigé de l'ex. 10 (TD densités)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. Alors X a pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2.\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.e^{-x^2}$$

On s'intéresse aux intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} t^2.e^{-t^2} dt$$

D'une part, par parité de $t \mapsto e^{-t^2}$,

$$I = \frac{1}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'autre part, par parité de $t \mapsto t^2.e^{-t^2}$,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.E(X^2) \quad \text{or } E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

2. Soit $\alpha > 0$ et

$$K_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha.t^2} dt = \frac{1}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha.t^2} dt$$

encore une fois par parité. On considère $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\alpha})$. Alors Y a pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2.\frac{1}{2\alpha}}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}.e^{-\alpha.x^2}$$

On a alors

$$K_1 = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) dt = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

Ensuite

$$K_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}.e^{-t} dt = \Gamma(\frac{1}{2})$$

et on peut montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ via le changement de variables $t = \frac{u^2}{2}$ pour se ramener à l'intégrale de Gauss (cf ex. de cours sur la fonction Gamma).

Enfin

$$K_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{2}.x^2}$$

Il s'agit ici encore de prendre une loi normale bien choisie !
Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$. Alors Z a pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2.\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.e^{-\frac{3}{2}.x^2}$$

D'où

$$K_3 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}.\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) dt = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

3. X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux une loi normale $\mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$. Par transformation affine, $3X$ suit aussi une loi normale. Comme $E(3X) = 3E(X) = 6$ et $V(3X) = 9V(X) = \frac{9}{2}$, la variable $3X$ suit la loi $\mathcal{N}(6, \frac{9}{3})$.
De même, par transformation affine, $-5Y$ suit une loi normale. Comme $E(-5Y) = -10$ et $V(-5Y) = 25V(Y) = \frac{25}{2}$, la variable $-5Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(-10, \frac{25}{2})$.
Enfin, les variables $3X$ et $-5Y$ étant indépendantes, par stabilité pour la somme de la loi normale,

$$3X - 5Y = 3X + (-5Y) \hookrightarrow \mathcal{N}(-4, 17)$$

puisque $6 - 10 = -4$ et $\frac{9}{2} + \frac{25}{2} = 17$.

Autre rédaction possible : par stabilité affine, puis par somme de variables indépendantes suivant des lois normales, la variable $3X - 5Y$ suit une loi normale. Comme

$$E(3X - 5Y) = 3E(X) - 5E(Y) = -4$$

$$V(3X - 5Y) = 9V(X) + 25V(Y)$$

on trouve bien que $3X - 5Y \hookrightarrow \mathcal{N}(-4, 17)$

Corrigé de l'ex. 14 (TD densités)

1. Calcul fait dans l'ex. 10 !

2. (a) On montre facilement que F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, croissante sur $\mathbb{R}$, qu'elle a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Donc F est bien la fonction de répartition d'une variable à densité X.
On obtient une densité de X en dérivant F partout où cela est possible (partout sauf en 0), et on donne la valeur 0 en 0 (de façon arbitraire). On obtient :

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 2x.e^{-x^2} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

(b) i. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante est (absolument) convergente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} 2x^2.e^{-x^2} dx$$

Or cette intégrale converge d'après la question 1. et vaut $2.\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Bilan : X admet une espérance et $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ii. $X^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Déterminons la fonction de répartition de X^2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
1er cas : si $x < 0$ alors $F_{X^2}(x) = 0$.
2ème cas : si $x \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= P(X^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= P(-\sqrt{x} < X \leq \sqrt{x}) \text{ car } X \text{ est à densité} \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

et on en déduit que $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

iii. D'après le cours sur la loi exponentielle, on a alors $E(X^2) = 1$. Par conséquent,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$