ECS2 - Lycée Saint Just
Mathématiques 2025/26

Programme de colle - **Semaine 12**
du 5 au 9 janvier 2026

Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire I (tout)

1. Définition d'un produit scalaire.
2. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Quelques produits scalaires classiques sur $E = \mathcal{C}^0([a,b])$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur $E = \mathbb{R}[X]$...
4. Utilisation de la bilinéarité du produit scalaire.
5. Vecteurs orthogonaux.
6. Norme associée à un produit scalaire.
   (a) Normes associées aux produits scalaires canoniques.
   (b) Propriétés d'une norme : $\forall u \in E,\ \|u\| \geqslant 0$, $\forall u \in E,\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$, si u n'est pas le vecteur nul alors $\|u\| > 0$, $\forall u \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \|\alpha u\| = |\alpha|\ \|u\|$.
   (c) $\forall (u,v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$ (*)
   (d) Théorème de Pythagore : u et v sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (*)
   (e) Formule de polarité : $\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ à savoir retrouver si besoin.
   (f) **Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité** (*) (**Preuve classique à connaître et bien comprendre**) : <u>à savoir utiliser</u> (nombreux exemples dans le cours)
   (g) Inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée.
7. Orthogonalité
   (a) Familles orthogonales.
   (b) Th. de Pythagore généralisé : si la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale alors,
   $$||u_1 + u_2 + \ldots + u_p||^2 = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 + \ldots + ||u_{p-1}||^2 + ||u_p||^2$$
   (c) **Orthogonalité et liberté**
   Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs ne contenant pas le vecteur nul, alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre (*).
8. Famille orthonormée.
9. Vecteur orthogonal à un sev, à un sev engendré. Sous-espaces orthogonaux. Deux sev orthogonaux sont en somme directe.
10. Espace euclidien : ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.
11. Base orthonormée (B.O.N)
12. Méthode d'orthonormalisation de Schmidt : **à savoir appliquer pour deux ou trois vecteurs, la formule générale est hors-programme**. Connaître la méthode et comprendre l'idée !
13. Théorème de la base orthonormée incomplète.
14. Expressions dans une BON $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$:
   (a) expression d'un vecteur $u \in E$: $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u,e_1\rangle \\ \langle u,e_2\rangle \\ \cdots \\ \langle u,e_n\rangle \end{pmatrix}$ (*)
   (b) expression du produit scalaire dans une BON
   Soient $(x,y) \in E^2$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors
   $$\langle x,y\rangle = {}^tX.Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k\rangle \langle y,e_k\rangle$$
   (c) expression de la norme dans une BON
   Avec les mêmes notations, $\|x\| = \sqrt{{}^tX.X} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k\rangle^2}$
   (d) matrice d'un endomorphisme f dans une BON
   $$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle f(e_1),e_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j),e_1\rangle & \cdots & \langle f(e_n),e_1\rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1),e_i\rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j),e_i\rangle & \cdots & \langle f(e_n),e_i\rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1),e_n\rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j),e_n\rangle & \cdots & \langle f(e_n),e_n\rangle \end{pmatrix}$$
   (e) matrice de passage entre deux BON
15. Matrice orthogonale : matrice inversible telle que ${}^tP = P^{-1}$.
   Une matrice de passage entre deux BON est une matrice orthogonale.
16. Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes est orthonormée.
17. Supplémentaire orthogonal.
   (a) Si F est un sev de E, définition de l'orthogonal de F, noté $F^\perp$.
   (b) $F \oplus F^\perp = E$: $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
   (c) $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.
   (d) $(F^\perp)^\perp = F$.
   (e) Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$ (*).
   (f) La concaténation d'une BON de F et d'une BON de $F^\perp$ donne une BON de E.

<u>Petits exercices vus en cours à savoir refaire</u>

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
   Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ x+y+z+t = 0\}$.
   Démontrer <u>très rapidement</u> (en utilisant le produit scalaire) que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, donner sa dimension, déterminer $F^\perp$ et une BON de $F^\perp$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique,
   donner une base du supplémentaire orthogonal de $H = Vect((1,1,2,0),(1,2,-1,1))$.

.	(*) : **preuve exigible**