`Python` td 7 - Méthode d'inversion

Objectif : pour une variable X à densité de loi non usuelle, on peut, sous certaines hypothèses sur la fonction de répartition de X, utiliser `rd.random()` pour simuler une telle variable. Vous serez plus ou moins guidé dans un tel exercice.
Retenir le nom "méthode d'inversion" qui peut être demandé

I. Méthode d'inversion pour la loi de Cauchy

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi de Cauchy si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et si X a pour fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{\pi}.Arctan(x) + \frac{1}{2}$$

1. Justifier que F_X est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
2. Calculer sa bijection réciproque F_X^{-1} et justifier que cette fonction est strictement croissante.
3. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(U \leq F_X(x))$.
   A retenir : passage crucial de la méthode d'inversion
4. En déduire que X suit la même loi qu'une certains variable aléatoire $Y = g(U)$ à déterminer.
5. Ecrire alors un programme Python qui simule la loi de Cauchy.

II. Exercice : méthode d'inversion, loi de min

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-t}} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X de densité f.
   (a) Donner $X(\Omega)$. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) Tracer rapidement l'allure de f et de F_X.
   (c) Justifier rapidement que X admet une espérance et une variance.
   Calculer $E(X)$.

3. **Simulation par la méthode d'inversion**

   Soit X une VAR de densité f et U une VAR où $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

   (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(U \leq F_X(x))$.
   (b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(U \leq F_X(x)) = P((1-(1-U)^2) \leq x)$.
   En déduire que X a la même loi que la variable $V = 1-(1-U)^2$.
   (c) Donner un programme Python permettant de simuler la VAR X et afficher le résultat obtenu.
   (d) A l'aide de la question 3.(b), retrouver la valeur de $E(X)$ puis calculer $V(X)$.

4. **Suite des minima**

   Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables mutuellement indépendantes de densité f. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = min(X_1, \cdots, X_n)$.

   (a) On considère le programme suivant :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
n=100
U=rd.random(n)
V=1-(1-U)**2
M=np.zeros(n)
for k in range(0,n):
    M[k]=np.min(V[0:k+1:1])
print(M)
```

   Quelles variables aléatoires a-t-on successivement simulé ?
   Taper ce programme et interpréter le résultat final. Est-ce surprenant ?
   (b) On suppose $n \geq 2$. Déterminer la fonction de répartition de M_n, justifier que M_n est à densité et déterminer une densité de M_n.
   Justifier que M_n admet une espérance et que $E(M_n) = \dfrac{2}{n+2}$. Rapprocher ce résultat de ce qui a été obtenu avec la simulation précédente.

5. **Nombre aléatoire de variables**

   Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VAR de densité f et une VARD N de loi géométrique de paramètre $1/2$, toutes définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.
   On suppose que les VAR X_k et N sont mutuellement indépendantes.
   On note T la variable aléatoire réelle définie par : $\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = min(X_1(\omega), ..., X_N(\omega))$, c'est à dire

$$T = min(X_1, X_2, \cdots, X_N)$$

   Attention : N est .... et pas ....

   (a) Modifier le programme ci-dessus pour simuler T.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de T et justifier que T est à densité.