Chapitre 9 - Algèbre bilinéaire II

I. Endomorphismes symétriques

Définition I.1
Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme f de E est symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

Remarque
Penser à vérifier d'abord que f est bien un endomorphisme !!

Exercice 1

1. Montrer qu'une homothétie d'un espace vectoriel euclidien est un endomorphisme symétrique.
2. On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
   Soit $u \in \mathbb{R}^4$, $u = (1, 0, 1, 0)$.
   Soit f l'application qui à tout vecteur x de $\mathbb{R}^4$ associe $f(x) = x - 2 \langle x, u \rangle .u$
   Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\left(\mathbb{R}^4, \langle ., . \rangle\right)$

Exercice 2
Exercice de cours
Soit f un endomorphisme symétrique de E. Montrer qu'alors $Ker(f)^{\perp} = Im(f)$.

Proposition I.1
Caractérisation dans une base
Soit E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit f un endomorphisme de E.
f est symétrique si et seulement si

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, \quad \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$$

Théorème I.1
Matrice dans une BON
Soit E un espace euclidien, muni d'une BON $\mathcal{B}$. Soit f un endomorphisme de E. Alors

f **est un endomorphisme symétrique** $\Leftrightarrow$ **sa matrice** $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ **est symétrique**

Exercice 3

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de l'endomorphisme f défini dans l'Exemple 2. ci-dessus.
2. On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$$

   On admet que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Vérifier qu'il s'agit d'un endomorphisme symétrique.

Théorème I.2
Soit E un espace euclidien, f un endomorphisme symétrique de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par f, alors le s.e.v. $F^{\perp}$ est stable par f.

Théorème I.3
Vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique
Soit E un espace euclidien. Soit f un endomorphisme symétrique de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. Si u est un vecteur propre associé à λ, v est un vecteur propre associé à μ, et si $\lambda \neq \mu$, alors les vecteurs u et v sont orthogonaux.
2. Si $\lambda \neq \mu$, alors les sev $Ker(f - \lambda Id_E)$ et $Ker(f - \mu Id_E)$ sont orthogonaux.
3. **Les sous-espaces propres de l'endomorphisme symétrique f sont deux à deux orthogonaux.**
4. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est orthogonale.

Exercice 4
Soit f l'application qui à tout vecteur x de $\mathbb{R}^4$ associe $f(x) = x - 2. \langle x, u \rangle .u$ où $u = (1, 0, 1, 0)$.
On a montré que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^4$.et on a déjà déterminé la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Théorème I.4
Orthodiagonalisation d'un endomorphisme symétrique (Admis)
Soit E un espace euclidien. Soit f **un endomorphisme symétrique** de E. Alors

1. f admet au moins une valeur propre.
2. il existe une **BON** $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ de E formée de vecteurs propres de f.
3. **f est diagonalisable**.
4. En notant $\forall k \in [[1, n]]$, $f(e'_k) = \lambda_k . e'_k$ et $D = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, alors

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = D$$

Remarque
Pour former la base $\mathcal{B}'$, il suffit de concaténer des BON des sous-espaces propres.

II. Matrices symétriques réelles et orthodiagonalisation

Rappel : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique, défini par :

$$\forall\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y\rangle =^t X.Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Théorème II.1
Orthodiagonalisation des matrices symétriques
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Soit A une matrice symétrique, c'est-à-dire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA = A$. Alors

1. A admet au moins une valeur propre.
2. A **est diagonalisable**.
3. Il existe une matrice **orthogonale** P (avec $P^{-1} = {}^tP$) telle que

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = D = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

   On dit que A est **orthodiagonalisable**.
4. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
5. En concaténant des BON de chaque sous-espace propre de A, on obtient une BON $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la matrice $P = (X_1|\cdots|X_n)$ diagonalise A.

Preuve
On applique le Théorème I.4 à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ qui est canoniquement associée à la matrice A.

Rappel
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) /\ {}^tA = A\}$. Alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Reprise exercice 4 : orthodiagonaliser la matrice A associée à f.

Exercice 5
1. On note $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Justifier que M est diagonalisable. Déterminer une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telle que $M = PD\,{}^tP$
2. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Justifier que la matrice A est orthodiagonalisable et orthodiagonaliser la matrice A
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
   Montrer que si pour tout vecteur colonne X non nul: $\langle AX, X\rangle > 0$, alors les valeurs propres de A sont strictement positives.

Une première approche des formes quadratiques :

Définition II.1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. L'application

$$\begin{array}{rcl} q_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & {}^tX.A.X \end{array}$$

est appelée forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ associée à A.

Exemple
Soit $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la forme quadratique associée à A.
2. Etudier le signe de cette forme quadratique

III. Projection orthogonale

Rappels sur les projections

III.1) Définition et propriétés

Définition III.1
Soit E un espace euclidien.
Soit F un sous espace vectoriel de E. On sait que $F \oplus F^{\perp} = E$.
On appelle **projection orthogonale sur** F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
On la note p_F.

Proposition III.1
Soit p_F la projection orthogonale sur F. Alors

- $F = Im(p_F) = Ker(Id_E - p_F)$
- $Ker(p_F) = F^{\perp}$. Donc $Ker(p_F)^{\perp} = F = Im(p_F)$.
- $p_F + p_{F^{\perp}} = Id_E$
- $p_F \circ p_{F^{\perp}} = p_{F^{\perp}} \circ p_F = 0$

Proposition III.2
p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si :

1. p est un endomorphisme de E.
2. $p \circ p = p$
3. $Ker(p) \perp Im(p)$

Remarque
Si $p \neq Id_E$ et $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, comme pour tout projecteur : $Spec(p) = \{0, 1\}$ et p est diagonalisable.

Remarque
Si $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $p = p_{\{0_E\}}$.
Si $p = Id_E$ alors $p = p_E$.

Théorème III.1
Soit E un espace euclidien.

$$p \text{ est un projecteur orthogonal de } E \Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ est un endomorphisme symétrique de } E \\ p \circ p = p \end{cases}$$

Théorème III.2
Caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur
Soit E un espace euclidien.

1. Soit F un sev de E, $u \in E$ et $v \in E$. Alors
   $\boxed{v = p_F(u) \Leftrightarrow v \in F \text{ et } u - v \in F^\perp}$
2. Supposons que $F = Vect(e_1, \cdots, e_m)$. Soit $u \in E$ et $v \in E$. Alors
   $\boxed{v = p_F(u) \Leftrightarrow \begin{cases} v \in F \\ \forall k \in [[1, m]], \quad (u - v) \perp e_k \end{cases}}$

Exercice 6
Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$, déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

Théorème III.3
Caractérisation connaissant une BON de F
Soit E un espace euclidien. Soit F un sev de E muni d'une BON $(u_1, \cdots, u_m)$. Alors

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x, u_k \rangle .u_k$$

Exercice 7
1. On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni du p.s. canonique.
   On considère le sous-espace vectoriel $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \ x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_3 = 0\}$.
   Déterminer le projeté orthogonal de $(1, 2, 1, 0)$ sur F.

2. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $(1, \cdots, 1)$ sur $F = \text{Vect}\Big((1, 0, \cdots, 0, 1), (2, 1, 0, \cdots, 0, 1, 2)\Big)$

Détermination en pratique d'une projection orthogonale

1. **Méthode 1** : Dans le cas où l'on connait une base orthonormée de F, on peut utiliser le théorème ci-dessus.
2. **Méthode 2** : Lorsque le sous-espace vectoriel F et le vecteur u sont donnés, on peut calculer $p_F(u)$ en utilisant les deux propriétés : $p_F(u) \in F$ et $u - p_F(u) \in F^\perp$.
3. **Méthode 3** : On utilisera parfois que $p_F = Id_E - p_{F^\perp}$.

Exercice 8
Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note $a = (-2, 1, 1, 3)$.
On note aussi $u_1 = (1, 2, 0, -2)$ et $u_2 = (2, 0, -2, 1)$ et $F = vect(u_1, u_2)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de a sur F par la méthode 2.
2. Déterminer une base orthonormale de F.
   Retrouver le projeté orthogonal de a sur F par la méthode 1.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.

III.2) Matrice d'un projecteur orthogonal

Théorème III.4
Matrice dans une BON
Soit E un espace euclidien. Soit p un endomorphisme de E et $\mathcal{C} = (e_1, \cdots, e_n)$ une BON de E. Notons $A = Mat_{\mathcal{C}}(p)$. Alors

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \quad \Leftrightarrow \quad A^2 = A \text{ et } {}^tA = A$$

Exercice 9
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f associé canoniquement à la matrice suivante. $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. Montrer que f est un projecteur orthogonal.

III.3) Minimisation par projection orthogonale

Théorème III.5
Théorème de minimisation par projection orthogonale
Soit E un e.v. euclidien de dimension $n \geq 1$.
Soit F un sev de E et $a \in E$ un vecteur fixé. Soit p_F la projection orthogonale sur F.

- L'application $h : F \to \mathbb{R}$, telle que $h(x) = \|a - x\|$ admet un minimum absolu, atteint uniquement en $p_F(a)$.
- Autrement dit, $\min_{x \in F} \|a - x\| = \|a - p_F(a)\|$.
  Ce minimum est atteint uniquement en $x = p_F(a)$.

Remarque
Soit $y \in F$. On a donc $y = p_F(a)$ ssi $\min_{x \in F} \|a - x\| = \|a - y\|$ qui est égale à la "distance de a à F".

Méthode d'utilisation du théorème de minimisation par projection orthogonale

Pour utiliser le théorème de minimisation par projection orthogonale :

- Etape 1 : On définit un espace F et un vecteur a.
- Etape 2 : On reconnait une écriture de la forme $||a-y||$ où le vecteur y est un vecteur quelconque du sous-espace vectoriel F.
- Etape 3 : On calcule $p_F(a)$.
- Etape 4 : On calcule $||a-p_F(a)||$ car le théorème assure que l'ensemble $\{||a-u||$ tel que $u \in F\}$ a un minimum et que ce minimum vaut $||a-p_F(a)||$.

Exercice 10

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, déterminer la distance de $(1,2,3)$ à
   $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$.
2. Déterminer le minimum de $\displaystyle\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt$ quand a et b décrivent $\mathbb{R}$.
   (on utilisera les résultats de l'exercice 6).
3. Déterminer le minimum de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$h(x,y)=(x+y-1)^2+(2x-y-1)^2+(y-1)^2$$

III.4) Pseudo-solution et problème des moindres carrés

Théorème III.6
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p. Soit B une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.
Alors l'application $h:\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, telle que $h(X)=\|A.X-B\|$ admet un minimum absolu strict : il existe une unique matrice colonne X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ qui rende minimale la quantité $\|AX-B\|$ quand X parcourt $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Notons $Y_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le projeté orthogonal de B sur $Im(A)=F$ sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ce minimum est atteint au seul point X_0 tel que $Y_0=AX_0$.
On dit que X_0 est une **pseudo-solution** de l'équation $AX=B$.

Lien avec le problème des moindres carrés :

Etant données deux séries statistiques $x=(x_1,\cdots,x_n)$ et $y=(y_1,\cdots,y_n)$, on cherche deux réels a et b tels que la quantité
$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$
soit minimale (cf TD Python). La droite d'équation $y=ax+b$ est alors appelée droite de régression.

Notons
$$B=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}x_1&1\\x_2&1\\\vdots&\vdots\\x_n&1\end{pmatrix}$$
Alors on remarque que $S=\|B-AX\|^2=\|AX-B\|^2$.
D'après le Th. III.6, il existe donc bien une unique matrice $X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ telle que S soit minimale.

Nous verrons dans le chapitre sur les fonctions de n variables comment calculer a et b.