

**Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire I (tout)**

1. Définition d'un produit scalaire.
2. Produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ . Produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
3. Quelques produits scalaires classiques.
4. Utilisation de la bilinéarité du produit scalaire.
5. Vecteurs orthogonaux.
6. Norme associée à un produit scalaire.
  - (a) Normes associées aux produits scalaires canoniques.
  - (b) Propriétés d'une norme
  - (c) Théorème de Pythagore
  - (d) Formule de polarité
  - (e) **Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité**
  - (f) Inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée.
7. Orthogonalité
  - (a) Familles orthogonales.
  - (b) Th. de Pythagore généralisé
  - (c) **Orthogonalité et liberté**  
Si  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille orthogonale de vecteurs ne contenant pas le vecteur nul, alors  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille libre.
8. Famille orthonormée.
9. Vecteur orthogonal à un sev, à un sev engendré. Sous-espaces orthogonaux. Deux sev orthogonaux sont en somme directe.
10. Espace euclidien : ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.
11. Base orthonormée (B.O.N)
12. Méthode d'orthonormalisation de Schmidt : **à savoir appliquer pour deux ou trois vecteurs, la formule générale est hors-programme.**
13. Théorème de la base orthonormée incomplète.
14. Expressions dans une BON  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  :

(a) expression d'un vecteur  $u \in E : u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$  donc  $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle \\ \langle u, e_2 \rangle \\ \dots \\ \langle u, e_n \rangle \end{pmatrix}$

- (b) expression du produit scalaire dans une BON

Soient  $(x, y) \in E^2$ ,  $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Alors

$$\langle x, y \rangle = {}^t X \cdot Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$

- (c) expression de la norme dans une BON

Avec les mêmes notations,  $\|x\| = \sqrt{{}^t X \cdot X} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2}$

- (d) matrice d'un endomorphisme  $f$  dans une BON

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle f(e_1), e_1 \rangle & \dots & \dots & \langle f(e_j), e_1 \rangle & \dots & \langle f(e_n), e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_i \rangle & \dots & \dots & \langle f(e_j), e_i \rangle & \dots & \langle f(e_n), e_i \rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_n \rangle & \dots & \dots & \langle f(e_j), e_n \rangle & \dots & \langle f(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix}$$

- (e) matrice de passage entre deux BON

15. Matrice orthogonale : matrice inversible telle que  ${}^t P = P^{-1}$ .  
Une matrice de passage entre deux BON est une matrice orthogonale.

16. Supplémentaire orthogonal.

- (a) Si  $F$  est un sev de  $E$ , définition de l'orthogonal de  $F$ , noté  $F^\perp$ .
- (b)  $F \oplus F^\perp = E : F^\perp$  est le supplémentaire orthogonal de  $F$ .
- (c)  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ .
- (d)  $(F^\perp)^\perp = F$ .
- (e) Si  $F \subset G$  alors  $G^\perp \subset F^\perp$  (\*).
- (f) La concaténation d'une BON de  $F$  et d'une BON de  $F^\perp$  donne une BON de  $E$ .

Petits exercices vus en cours à savoir refaire

1. Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire canonique.  
Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$ .  
Démontrer très rapidement (en utilisant le produit scalaire) que  $F$  est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^4$ , donner sa dimension, déterminer  $F^\perp$  et une BON de  $F^\perp$ .
2. Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire canonique,  
donner une base du supplémentaire orthogonal de  $H = Vect((1, 1, 2, 0), (1, 2, -1, 1))$ .

1. Endomorphismes symétriques :

- (a) Définition.
- (b) Caractérisation dans des bases.
- (c)  $f$  est un endomorphisme symétrique si et seulement si sa matrice dans une BON  $\mathcal{B}$  de  $E$  est symétrique.
- (d) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme symétrique. Si  $F$  est stable par  $f$  alors  $F^\perp$  est stable par  $f$  (\*).
- (e) Si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes  $\lambda$  et  $\mu$ , alors  $u$  et  $v$  sont orthogonaux (\*).
- (f) Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.
- (g) Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est orthogonale.
- (h) Si  $f$  est symétrique alors  $f$  est **diagonalisable dans une BON de  $E$** .

2. Matrices symétriques :

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle.

- (a)  $A$  admet au moins une valeur propre réelle, toutes ses valeurs propres sont réelles.
- (b)  $A$  est diagonalisable.
- (c)  $A$  est orthodiagonalisable : il existe une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = P.D. {}^tP$  où  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .
- (d) . En concaténant des BON de chaque sous-espace propre de  $A$  on obtient une BON  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $P = (X_1|X_2|\dots|X_n)$  diagonalise  $A$ .

3. Forme quadratique  $q_A$  associée à une matrice symétrique  $A$  : définition uniquement.

(\*) : **preuve exigible**