Programme de colle - **Semaine 14**
du 19 au 23 janvier 2026

Chapitre 9 - Algèbre bilinéaire II (tout)

1. Endomorphismes symétriques :
   (a) Définition.
   (b) Caractérisation dans des bases.
   (c) f est un endomorphisme symétrique si et seulement si sa matrice dans une BON $\mathcal{B}$ de E est symétrique.
   (d) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Si F est stable par f alors $F^{\perp}$ est stable par f (*).
   (e) Si u et v sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes λ et μ, alors u et v sont orthogonaux (*).
   (f) Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.
   (g) Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est orthogonale.
   (h) Si f est symétrique alors f **est diagonalisable dans une BON de** E.

2. Matrices symétriques :
   Soit A une matrice symétrique réelle.
   (a) A admet au moins une valeur propre réelle, toutes ses valeurs propres sont réelles.
   (b) A est diagonalisable.
   (c) A est orthodiagonalisable : il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = P.D.{}^tP$ où $D = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
   (d) . En concaténant des BON de chaque sous-espace propre de A on obtient une BON $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$ diagonalise A.

3. Forme quadratique q_A associée à une matrice symétrique A : définition uniquement.

4. Projection orthogonale
   (a) Rappels sur les projecteurs : endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Un projecteur de E est la projection sur $F = Im(p)$ parallèlement à $G = Ker(p)$.
   (b) Définition d'un projecteur orthogonal : projection sur F, parallèlement à $F^{\perp}$.
   (c) $Im(P_F) = F$, $Ker(p_F) = F^{\perp}$, donc $Im(p_F) = (Ker(p_F))^{\perp}$, $p_F + p_{F^{\perp}} = Id_E$,
   $p_F \circ p_{F^{\perp}} = p_{F^{\perp}} \circ p_F = 0$.
   (d) p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si : p est un endomorphisme de E, $p \circ p = p$ et $Ker(p) \perp Im(p)$.
   (e) p **est un projecteur orthogonal de** $E \Leftrightarrow p$ **est un endomorphisme symétrique de** E **et** $p \circ p = p$.
   Conséquence : si $\mathcal{B}$ est une BON de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(p)$, p est un projecteur orthogonal ssi $A^2 = A$ et ${}^tA = A$.
   (f) **Caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur**
   Soit E un espace euclidien, soit F un sev de E, $u \in E$ et $v \in E$. Alors
   $\boxed{v = p_F(u) \Leftrightarrow v \in F \text{ et } u - v \in F^{\perp}}$
   Si $F = Vect(e_1, \cdots, e_m)$ alors $v = p_F(u)$ ssi $\begin{cases} v \in F \\ \forall k \in [[1, m]], \quad (u-v) \perp e_k \end{cases}$.
   (g) **Caractérisation connaissant une BON de** F Soit E un espace euclidien. Soit F un sev de E muni d'une BON $(u_1, \cdots, u_m)$. Alors
   $$\boxed{\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x, u_k \rangle .u_k}$$
   (h) **Minimisation par projection orthogonale**.
   Soit E un e.v. euclidien, F un sev de E et $a \in E$ un vecteur fixé.
   Soit p_F la projection orthogonale sur F. L'application $h : F \to \mathbb{R}$, telle que $h(x) = \|a - x\|$ admet un minimum absolu, atteint uniquement en $p_F(a)$.
   (i) **Pseudo-solutions, moindres carrés** (difficile, on atteint les limites de notre programme !!)

.

(*) : **preuve exigible**