Chapitre 10 - Vecteurs aléatoires

I. Couples de variables aléatoires discrètes

Définition I.1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit (X, Y) un couple de VARD définies sur cet espace.

- La loi du couple (X, Y) est la donnée de toutes les probabilités :

$$\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X,Y) = (i,j)) = P([X = i] \cap [Y = j])$$

  On parle aussi de loi conjointe de X et Y.

- La loi de X est la première loi marginale, la loi de Y est la deuxième loi marginale.

Remarque

- Déterminer la loi du couple (X, Y) c'est déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ ainsi que leur loi conjointe.
- Dans le cas fini, on note parfois la loi du couple dans un tableau à double entrée.

Théorème I.1
Soit (X, Y) un couple de VARD.

1. Les événements $[(X,Y) = (i,j)]$ où $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ forment un système complet d'événements et
$$\sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$
2. $\forall i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j])$

   $\forall j \in Y(\Omega)$, $P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j])$

   Les deux lois marginales se déduisent donc de la loi du couple.

Remarque
Comment écrire les formules ci-dessus avec des probabilités conditionnelles ?
Que peut-on dire si X et Y sont indépendantes ?

Théorème I.2
Soit (X, Y) un couple de VARD. Soit g une application $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $Z = g(X, Y)$.
Alors Z est une variable aléatoire discrète et sa loi se déduit de la loi du couple (X, Y) (loi image).

Remarque
Pour tout $k \in Z(\omega)$,

$$[Z = k] = \bigcup_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \text{ où } g(i,j) = k} [X = i] \cap [Y = j]$$

d'où le calcul de $P(Z = k)$ via la loi du couple (X, Y).

Remarque
En particulier loi de la somme $S = X + Y$ déjà vue : $S(\Omega) = \{i + j \text{ où } (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$ et

$$\forall k \in S(\Omega), \quad P(S = k) = \sum_{i \in X(\Omega),\ j \in Y(\Omega) \text{ avec } i+j=k} P([X = i] \cap [Y = j])$$

(produit de convolution discret)
Revoir les sommes de lois discrètes usuelles déjà vues : stabilité Poisson, stabilité binômiales...

Exercice 1
On fait une succession illimitée de tirages d'une boule dans dans une urne contenant 10 boules blanches, 5 noires et 5 rouges. Chaque boule obtenue est remise dans l'urne avant le tirage suivant.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule rouge pour la première fois. Déterminer la loi de X son espérance et sa variance.
2. Soit Y le nombre de tirages qu'il faut faire pour obtenir une boule rouge pour la deuxième fois.
   - Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   - En déduire la loi de Y.
   - Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
3. On note $Z = Y - X$.
   - Que représente Z ?
   - Déterminer la loi conjointe du couple (X, Z).
   - En déduire la loi de Z.
   - Les variables X et Z sont elles indépendantes ?
   - Les variables Y et Z sont elles indépendantes ?

Théorème I.3
Théorème de tranfert pour les couples de VARD
Soit (X, Y) un couple de VARD. Soit g une application $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ et Z la VAR définie par $Z = g(X, Y)$.

1. Si X et Y sont des variables finies, alors Z est une VARD finie, Z admet une espérance et
$$E(g(X,Y)) = \sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(i,j).P([X = i] \cap [Y = j])$$
2. Si $X(\Omega)$ est fini et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ (ou infini dénombrable) alors :
   Si pour tout $i \in X(\Omega)$ la série $\sum_{j \geq 0} g(i,j).P([X = i] \cap [Y = j])$ converge absolument, alors la VARD Z admet une espérance et
$$E(g(X,Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \Big(\sum_{j \in Y(\Omega)} g(i,j).P([X = i] \cap [Y = j]) \Big)$$
3. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ (ou infinis dénombrables) alors :
   si la série double de t.g. $g(i,j).P([X = i] \cap [Y = j])$ converge absolument, alors la VARD $Z = g(X, Y)$ admet une espérance et
$$E(g(X,Y)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \Big(\sum_{j \in Y(\Omega)} g(i,j).P([X = i] \cap [Y = j]) \Big)$$

Remarque
Il suffit donc de connaître la loi du couple (X, Y) pour étudier et déterminer (si elle existe) $E(g(X, Y))$.

Proposition I.1
Cas particulier du produit
Soit (X, Y) un couple de VARD. Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $S = X.Y$ admet une espérance et
$$E(X.Y) = \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} i.j.P([X = i] \cap [Y = j])$$

Remarque
Nous avons déjà vu que si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, alors $X.Y$ admet une espérance et $\boxed{E(X.Y) = E(X).E(Y)}$

II. Covariance d'un couple de VARD

Observation :
Soit X et Y deux VARD finies. Alors X, Y, $X + Y$ admettent une espérance et une variance.
$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) \\ &= V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) \end{aligned}$$

Définition II.1
Covariance
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant un moment d'ordre 2.
Alors $(X - E(X)).(Y - E(Y))$ admet une espérance, et on appelle **covariance du couple** (X, Y) le réel
$$Cov(X, Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big)$$

Théorème II.1
Formule de Huygens pour la covariance
Avec les mêmes hypothèses,
$$Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Remarque
C'est le plus souvent avec cette formule qu'on calcule $Cov(X, Y)$.

Théorème II.2
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant un moment d'ordre 2.
Alors :

- $X + Y$ admet une variance et $\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2.Cov(X, Y)}$
- $\boxed{Cov(X, X) = V(X)}$

Remarque
Covariance en fonction de la variance
$Cov(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$ ("formule de polarité")

Théorème II.3
Soit encore X et Y deux VARD admettant un moment d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes alors

- $Cov(X, Y) = 0$
- $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Remarque
Si $Cov(X, Y) \neq 0$ alors X et Y ne sont pas indépendantes. Attention, réciproque fausse.

Contre-exemple
Soit X une VARD suivant la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et Y la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement $[X = 0]$.
Déterminer la loi du couple (X, Y) et $Cov(X, Y)$.
X et Y sont-elles indépendantes ? Conclure.

Théorème II.4
Propriétés de la covariance
Soit (X, Y, Z) un triplet de VARD admettant un moment d'ordre 2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(X, X) = V(X) \geq 0$
3. $Cov(aX + Y, Z) = a.Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$ et $Cov(X, bY + Z) = b.Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$

   On peut résumer les points 1. 2. 3. en disant que $Cov(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
4. Si Y est une variable certaine, alors $Cov(X, Y) = 0$.
5. $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$

Théorème II.5
plus au programme - mais à comprendre, peut servir !!
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ des VARD admettant un moment d'ordre 2.
Alors $\sum_{i=1}^n X_i$ admet une variance et
$$V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{(i,j)\in[[1,n]]^2} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2. \sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$$

A justifier très vite : "par bilinéarité"

Remarque
Si X_1, ..., X_n sont deux à deux indépendantes alors $V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

Définition II.2
Coefficient de corrélation linéaire
Soient X et Y deux VARD admettant un moment d'ordre 2.
On suppose que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$.
On appelle coefficient de corrélation de (X, Y) le réel noté $\rho_{(X,Y)}$ défini par

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\ V(Y)}}$$

Proposition II.1
Soient X et Y deux VARD admettant un moment d'ordre 2.
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
Si $ac > 0$ alors $\rho(aX + b, cY + d) = +\rho(X, Y)$.
Si $ac < 0$ alors $\rho(aX + b, cY + d) = -\rho(X, Y)$.

Théorème II.6
Soit (X, Y) un couple de VARD admettant un moment d'ordre 2, avec $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$. Alors

1. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ d'où $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}$ **(inégalité de Cauchy-Schwarz)**
2. si X et Y sont indépendantes alors $\rho(X, Y) = 0$.
3. $|\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tels que $P(Y = aX + b) = 1$.
   Si $\rho(X, Y) = 1$ alors X et Y croissent dans le même sens.
   Si $\rho(X, Y) = -1$ alors X et Y croissent en sens contraire.

Preuve de cours : idem Cauchy-Schwarz !

Remarque
Si $|\rho(X, Y)| = 1$, on dit que X et Y sont corrélées.
Si $\rho(X, Y) = 0$, X et Y sont non corrélées (en particulier si X et Y sont indépendantes).

III. Exercices

Exercice 2
Soit X une VARD avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ avec

$$P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{1}{6}$$

Soit la VAR $Y = X^2$. Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi du couple (X, Y). Calculer $Cov(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3
Soit X et Y deux variables indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p. On considère les variables $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Montrer que $Cov(S, D) = 0$.
2. Justifier que S et D ne sont pas indépendantes.

Exercice 4
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Montrer que :

1. $|E(XY)| \leqslant E(|XY|) \leqslant \frac{1}{2}(E(X^2) + E(Y^2))$
2. $\sigma_{X+Y} \leqslant \sigma_X + \sigma_Y$

Exercice 5
Soit X et Y deux variables de Bernoulli telles que $Cov(X, Y) = 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 6
Soit X et Y deux variables indépendantes avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Justifier que $Z = X^2Y$ admet une espérance et calculer $E(Z)$.

Exercice 7
Soit X et Y deux variables indépendantes discrètes de même loi. On considère les variables $V = min(X, Y)$ et $W = X - Y$. On suppose que $X + 1$ et $Y + 1$ suivent une loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer la loi du couple (V, W).
2. Déterminer les lois de V et de W.
3. V et W sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer $P(X = Y)$.

Exercice 8
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VARD indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n.X_{n+1}.X_{n+2}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Justifier que si $|i - j| > 2$ alors Y_i et Y_j sont indépendantes.
3. Soit $n \geq 3$.
   (a) Soit $(i, j) \in [[1, n]]^2$. Déterminer $Cov(Y_i, Y_j)$.
   (b) Déterminer la variance de $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

IV. Vecteurs aléatoires quelconques

Définition IV.1
Soit $(X_k)_{k\in[[1,n]]}$ une n-liste de VAR définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Cette n-liste est appelée **vecteur aléatoire**
Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$, c'est déterminer la fonction $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où

$$F_X(x_1, \cdots, x_n) = P(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x_k])$$

Théorème IV.1
Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires ayant la même loi.
Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ (cf chapitre sur les fonctions de n variables).
Alors les deux variables $g(X_1, \cdots, X_n)$ et $g(Y_1, \cdots, Y_n)$ ont la même loi.

Remarque
Nous avons déjà vu la notion d'indépendance mutuelle pour n variables aléatoires X_1, ..., X_n.

Proposition IV.1
Soit X_1, ..., X_n des VAR discrètes ou à densité.

1. Si pour tout $k \in [[1, n]]$, X_k admet une espérance et si les variables X_k sont mutuellement indépendantes, alors $X_1. \cdots .X_n$ admet une espérance et
$$E(X_1.X_2. \cdots .X_n) = E(X_1).E(X_2). \cdots .E(X_n)$$
2. Si pour tout $k \in [[1, n]]$, X_k admet un moment d'ordre 2 et si les X_k sont deux à deux indépendantes, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ admet une variance et
$$V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

V. Vecteurs aléatoires discrets

Définition V.1
Soit $(X_k)_{k\in[[1,n]]}$ une n-liste de VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Cette n-liste est appelée **vecteur aléatoire discret**
Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$, c'est donner,
pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,
$$P(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k])$$
Les lois de X_1, ..., X_n sont appelées lois marginales.

Remarque
Avec la formule des probabilités totales, on a par exemple
$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \quad P(X_1 = x_1) = \sum_{(x_2,\cdots,x_n)\in X_2(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} P(\bigcap_{k\in[[1,n]]} [X_k = x_k])$$
Rappel :
Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret. Ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si
$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P(\bigcap_{k\in[[1,n]]} [X_k = x_k]) = \prod_{k\in[[1,n]]} P(X_k = x_k)$$

VI. Stabilité pour la somme : rappels

Théorème VI.1
1. Soit $(X_1, \cdots, X_m)$ un vecteur aléatoire formé de m variables aléatoires discrètes où $m \geq 1$, qui sont mutuellement indépendantes.
   (a) $\boxed{\text{Si } \forall k \in [[1, m]],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p) \text{ alors } \sum_{k=1}^m X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\sum_{k=1}^m n_k, p)}$
   Cas particulier : si $\forall k \in [[1, m]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ (loi de Bernoulli) alors $\sum_{k=1}^m X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$.
   (b) $\boxed{\text{Si } \forall k \in [[1, m]],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k) \text{ alors } \sum_{k=1}^m X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^m \lambda_k)}$
2. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire formé de n variables aléatoires à densité où $n \geq 1$, qui sont mutuellement indépendantes.
   (a) $\boxed{\text{Si } \forall k \in [[1, n]],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2) \text{ alors } \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\sum_{k=1}^n m_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2)}$
   (b) $\boxed{\text{Si } \forall k \in [[1, n]],\ X_k \hookrightarrow \gamma(\nu_k) \text{ alors } \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \gamma(\sum_{k=1}^n \nu_k)}$
   Cas particulier : si $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1) = \gamma(1)$ alors $\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \gamma(n)$.

Exercice 9
Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

1. Soit $k \in [[1, n]]$. Quelle est la loi suivie par $\lambda.X_k$?
   Voir le cours sur la loi exponentielle
2. En déduire la loi de la variable $\sum_{k=1}^n X_k$.

VII. Matrice de variance-covariance (HP)

Cette notion n'est plus au programme... Sera redéfinie si besoin.

Définition VII.1
Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2. On appelle matrice de variance-covariance (ou simplement matrice des covariances) la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par
$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, \quad m_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$$

Remarque
- La matrice de variance-covariance est symétrique.
- Les termes de la diagonale de cette matrice sont :
- Si les variables X_1, ..., X_n sont deux à deux indépendantes alors la matrice de variance-covariance est diagonale.
- On a $V(\sum_{k=1}^n X_k) = \cdots$.