Devoir surveillé n°5 - 14/01/2026

<u>**Consignes :**</u> Vous devez numéroter les pages et encadrer à la règle vos résultats.

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
On notera $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire canonique de E et $\|.\|$ la norme associée.

Partie I

Dans cette partie, on note g l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice A^2, puis la matrice A^3.
   Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que : $A^3 = -\alpha^2.A$

2. Démontrer que 0 est valeur propre de g, et déterminer un vecteur v_1 de norme 1 tel que (v_1) soit une base de l'espace propre $E_0(g)$ de g associé à la valeur propre 0.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de g.

4. L'endomorphisme g est-il bijectif ? Est-il diagonalisable ?

5. On pose $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.
   Démontrer que $v_2 \in (E_0(g))^{\perp}$, puis déterminer un vecteur v_3 tel que (v_2, v_3) soit une base orthonormale de $(E_0(g))^{\perp}$.

6. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de E, et déterminer la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{C}$.

Partie II

1. Pour tout endomorphisme f de E, démontrer que les deux propriétés (P_1) et (P_2) ci-dessous sont équivalentes :

   $$\begin{array}{lcl} (P_1) & : & \forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0 \\ (P_2) & : & \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle \end{array}$$

   Un endomorphisme vérifiant les propriétés (P_1) et (P_2) est dit anti-symétrique.

2. Démontrer que l'endomorphisme g défini dans la partie précédente est anti-symétrique.

   Dans toute la suite de l'exercice, on considère un endomorphisme f de E anti-symétrique.
   L'objectif de cette partie est de démontrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice représentative de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   où α est un réel.

3. On veut démontrer par l'absurde que f n'est pas bijective.
   On suppose donc que f est bijective.
   Soit x un vecteur non nul de E et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$.
   (a) Déterminer la dimension de F.
   (b) Démontrer qu'il existe un vecteur y non nul de E tel que la famille $(x, f(x), y)$ est orthogonale.
   (c) Démontrer alors que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
   (d) Conclure.

4. Démontrer qu'il existe trois vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 de E tels que e'_1 appartient au noyau de f, et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de E.

5. (a) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est anti-symétrique.
   (b) Conclure quant à l'objectif annoncé au début de cette partie.

Exercice 2

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice, sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

   On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [1, +\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

4. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que f. On note G sa fonction de répartition.

   (a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

   (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   (c) Écrire une fonction Python d'en-tête def simulX(c) utilisant rd.exponential et permettant de simuler X.

Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c. On pose $Y_1 = \ln(X_1), Y_2 = \ln(X_2)$ et $Z = X_1 X_2$.

1. Écrire une fonction Python d'en-tête def simulZ(c) utilisant la fonction simulX(c) et permettant de simuler Z.

2. Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que la variance de Z est donnée par:
$$V(Z) = \frac{c^2\left(2c^2 - 4c + 1\right)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

3. (a) Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2.

   (b) En déduire la loi de $cY_1 + cY_2$.

4. (a) Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$ et K celle de $cY_1 + cY_2$. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de K, puis vérifier qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par :
$$h(x) = \begin{cases} c^2 x \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z. Exprimer, pour tout réel $x, F_Z(x)$ à l'aide de H. En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par:
$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

5. (a) Pour tout réel α strictement supérieur à 1 , montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur.

   (b) Retrouver alors les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 2.

Problème

Partie 1 : calcul d'intégrales utiles pour la suite

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose :

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$$

On a, en particulier, $I(p,0) = \displaystyle\int_0^1 x^p \, dx$ et $I(0,q) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^q \, dx$.

1. Donner les valeurs de $I(p,0)$ et $I(0,q)$.
2. Montrer que pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :
$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$
3. Pour tout q de $\mathbb{N}$, on considère la propriété H_q :
$$\text{"}\forall p \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)\text{"}$$
Montrer, par récurrence sur q, que H_q est vraie pour tout entier naturel q.
4. Donner explicitement, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q, puis en déduire pour tout entier naturel n, la valeur de $I(n,n)$ en fonction de n.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que b_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

   On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où X_n admet b_n pour densité
2. Reconnaître la loi de X_0.
3. (a) Avec la Partie 1, montrer que X_n possède une espérance et que $E(X_n) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n.

   (c) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,
$$P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4\epsilon^2(2n+3)}$$
   Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \epsilon)$?
   On dit alors que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable certaine de valeur $\frac{1}{2}$.

Partie 3 : modèle de X_n, simulation informatique

On considère $2n+1$ variables aléatoires U_1, U_2, ..., U_{2n+1} définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On suppose que ces variables représentent respectivement les instants d'arrivée de $2n+1$ personnes A_1, A_2, ..., A_{2n+1} à leur lieu commun de rendez-vous. Pour tout k de $[\![1; 2n+1]\!]$, on note alors V_k l'instant d'arrivée de la personne arrivée la k^{e} au rendez-vous (cette personne n'étant pas forcément A_k). On admet que V_k est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on note G_k sa fonction de répartition.

1. On note F_U la fonction de répartition commune aux variables U_1, U_2, ..., U_{2n+1}. Rappeler l'expression de $F_U(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leq x \leq 1$ ou $x > 1$.

2. (a) Justifier que $V_{2n+1} = Max(U_1, U_2, ..., U_{2n+1})$.

   (b) En déduire $G_{2n+1}(x)$ pour tout réel x.

3. (a) Écrire la variable V_1 en fonction de U_1, U_2, ..., U_{2n+1}.

   (b) En déduire, pour tout réel x, la probabilité $P(V_1 > x)$ puis déterminer $G_1(x)$ pour tout réel x.

4. Écrire un script `Python` permettant de simuler V_1 et V_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

5. (a) Montrer que l'on a :

$$\forall x \in [0, 1],\ G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

   (b) Déterminer une densité g_{n+1} de V_{n+1} et en déduire que V_{n+1} suit la même loi que X_n.

   (c) On considère le script Python suivant :

   ```
   U=np.array([8,2,9,13,23,1,5])
   V=np.median(U)
   disp(V,'V=')
   ```

   Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?

   (d) Écrire un script `Python` permettant de simuler X_n.