Corrigé du DS n°5 - 14/01/2026

Exercice 1 ("Sujet 0", Ecricome 2023)

Partie I

1. On obtient par le calcul
$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$
puis
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -12 \\ -6 & 0 & 6 \\ 12 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$
On a donc $A^3 = -6.A$. En notant $\alpha = \sqrt{6}$, on a alors $\boxed{A^3 = -\alpha^2.A}$

2. Déterminons le noyau de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors
$$X \in Ker(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y+2z = 0 \\ x - z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2z \\ x = z \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$$
Ainsi $Ker(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ et donc $Ker(g) = Vect((1,2,1))$. Comme $Ker(g) \neq \{0\}$, 0 est bien une valeur propre de g.
$\|(1,2,1)\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$. Notons $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}.(1,2,1)$. Le vecteur v_1 est alors de norme 1 et la famille (v_1) est une base de $Ker(g) = E_0(g)$.

3. Le polynôme $P(x) = x^3 + \alpha^2.x$ est annulateur de A d'après la question 1.
Comme $P(x) = x(x^2+\alpha^2)$, ce polynôme a pour unique racine 0. D'après le cours,
$$Sp(A) \subset \{\text{racines de P}\}$$
donc $Sp(A) \subset \{0\}$. Finalement, $\boxed{Sp(g) = Sp(A) = \{0\}}$

4. Comme $0 \in Sp(g)$, $\boxed{g \text{ n'est pas bijectif}}$ De plus,
$$\sum_{\lambda \in Sp(g)} \dim(Ker(g - \lambda.Id)) = \dim(Ker(g)) = 1 \neq 3$$
donc $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$

5. On pose $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\langle (1,2,1), (-1,0,1) \rangle = 0$$
donc $v_2 \in (E_0(g))^{\perp}$. D'après le cours, comme $\dim(E_0(g)) = 1$, on a $\dim(E_0(g)^{\perp}) = 3-1 = 2$.
Considérons par exemple le vecteur $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.(1,-1,1)$. Alors v_3 est un vecteur normé, qui est orthogonal à v_1, donc $v_3 \in E_0(g)^{\perp}$. De plus, les vecteurs v_2 et v_3 sont orthogonaux, donc forment une famille orthonormée donc libre. Cette famille étant de cardinal 2, il s'agit d'une base de $E_0(g)^{\perp}$.
<u>Bilan :</u> la famille (v_2, v_3) où $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ et $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.(1,-1,1)$ est une BON de $(E_0(g))^{\perp}$.

6. La famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$, il s'agit donc d'une famille libre. Etant de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathcal{C}$ est une BON de E. Dans cette base : $g(v_1) = 0$ car $v_1 \in Ker(g)$.
$$A.\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $g(v_2) = \sqrt{6}.v_3$
$$A.\frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{3}..\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
donc $g(v_3) = -\sqrt{6}.v_2$.
Finalement, la matrice dans la BON $\mathcal{C}$ de g est :
$$Mat_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II

1. Pour tout endomorphisme f de E, montrons que les deux propriétés (P_1) et (P_2) ci-dessous sont équivalentes :
$$\begin{array}{lcl} (P_1) & : & \forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0 \\ (P_2) & : & \forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle \end{array}$$
   - Supposons que la propriété (P_2) est vraie. Alors, pour tout $x \in E$, en prenant $x = y$:
$$\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle \Leftrightarrow 2\langle x, f(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(x), x \rangle = 0$$
donc la propriété (P_1) est vraie.
   - Supposons que la propriété (P_1) est vraie. Soit $(x,y) \in E^2$. On a alors :
$$\begin{array}{rcl} \langle f(x+y), x+y \rangle = 0 & \Rightarrow & \langle f(x) + f(y), x+y \rangle = 0 \quad \text{par linéarité de } f \\ & \Rightarrow & \langle f(x), x \rangle + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle + \langle f(y), y \rangle = 0 \\ & \Rightarrow & \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle = 0 \quad \text{d'après } (P_1) \\ & \Rightarrow & \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle \end{array}$$
donc la propriété (P_2) est vraie.
   - <u>Bilan :</u> $\boxed{\text{par double implication, } (P_1) \Leftrightarrow (P_2)}$

2. Soit $u \in \mathbb{R}^3$, $u = (x, y, z)$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une BON de $\mathbb{R}^3$ pour le p.s. canonique,

$$\langle g(u), u \rangle = {}^t(A.X).X = {}^tX.{}^tA.X = (xyz).\begin{pmatrix} y-2z \\ -x+z \\ 2x-y \end{pmatrix} = xy - 2xz - xy + yz + 2xz - yz = 0$$

Donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } g \text{ défini dans la partie précédente est anti-symétrique}}$

3. On veut démontrer par l'absurde que f n'est pas bijective.
On suppose donc que f est bijective.
Soit x un vecteur non nul de E et soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $f(x)$.

(a) Montrons que la famille $(x, f(x))$ est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha.x + \beta.f(x) = 0$$

Alors en prenant le produit scalaire avec x :

$$\langle x, \alpha.x + \beta.f(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha.\langle x, x \rangle + \beta.\langle x, f(x) \rangle = 0$$

D'après la propriété (P_1), $\langle x, f(x) \rangle = 0$, donc $\alpha.\|x\|^2 = 0$. Comme $x \neq 0_E$, $\|x\| > 0$, donc $\alpha = 0$. Enfin, comme f est supposée bijective, $Ker(f) = \{0_E\}$. Comme $x \neq 0_E$, $x \notin Ker(f)$ donc $f(x) \neq 0$. Finalement, comme $\beta.f(x) = 0$, on a $\beta = 0$.
Ainsi, $\alpha = \beta = 0$: la famille $(x, f(x))$ est libre.
Comme $F = Vect(x, f(x))$ on a donc $\boxed{\dim(F) = 2}$

(b) On sait déjà d'après la propriété (P_1) que x et $f(x)$ sont orthogonaux. Comme $\dim(F) = 2$, on a $\dim(F^\perp) = 3 - 2 = 1$. Soit y un vecteur non nul de $F^\perp$. Alors y est orthogonal à x et à $f(x)$. Donc la famille $\langle x, f(x), y \rangle$ est orthogonale.

(c) Montrons que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\alpha.x + \beta.f(x) + \gamma.y + \delta.f(y) = 0$$

En calculant le produit scalaire de ce vecteur avec y, comme $\langle x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle f(y), y \rangle = 0$, on obtient $\gamma = 0$.
Puis en calculant le produit scalaire de $\alpha.x + \beta.f(x) + \delta.f(y) = 0$ avec x :

$$\alpha.\langle x, x \rangle + \delta \langle f(y), x \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha.\|x\|^2 - \delta \langle y, f(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha.\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

en utilisant (P_2).
Reste $\beta.f(x) + \delta.f(y) = 0 \Leftrightarrow f(\beta.x + \delta.y) = 0$. Comme $Ker(f) = \{0\}$, on alors $\beta.x + \delta.y = 0$. Comme x et y sont deux vecteurs orthogonaux non nuls, ils forment une famille libre et donc enfin $\beta = \delta = 0$.
<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), y, f(y)) \text{ est libre}}$

(d) La famille $(x, f(x), y, f(y))$ est une famille libre de cardinal 4 dans un espace de dimension 3 : c'est absurde !
Donc notre hypothèse initiale est fausse : $\boxed{\text{si } f \text{ est anti-symétrique alors } f \text{ n'est pas bijective}}$

4. Comme f n'est pas bijective, $Ker(f) \neq \{0_E\}$. Soit e'_1 un vecteur non nul de $Ker(f)$. Quitte à le normer, on peut supposer que $\|e'_1\| = 1$. D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe alors des vecteurs e'_2, e'_3 de E tels que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de E.

5. (a) Comme $\mathcal{B}'$ est une BON, on a :

$$A = Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \langle f(e'_1), e'_1 \rangle & \langle f(e'_2), e'_1 \rangle & \langle f(e'_3), e'_1 \rangle \\ \langle f(e'_1), e'_2 \rangle & \langle f(e'_2), e'_2 \rangle & \langle f(e'_3), e'_2 \rangle \\ \langle f(e'_1), e'_3 \rangle & \langle f(e'_2), e'_3 \rangle & \langle f(e'_3), e'_3 \rangle \end{pmatrix}$$

D'après (P_2), pour tout $(i, j) \in [[1, 3]]^2$,

$$({}^tA)_{i,j} = (A)_{j,i} = \left\langle f(e'_i), e'_j \right\rangle = -\left\langle e'_i, f(e'_j) \right\rangle = -(A)_{i,j}$$

donc ${}^tA = -A$: la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est anti-symétrique.

(b) Comme $f(e'_1) = 0$ et comme $\langle f(e'_2), e'_2 \rangle = \langle f(e'_3), e'_3 \rangle = 0$, on peut dire que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \langle f(e'_2), e'_1 \rangle & \langle f(e'_3), e'_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle f(e'_3), e'_2 \rangle \\ 0 & \langle f(e'_2), e'_3 \rangle & 0 \end{pmatrix}$$

et par antisymétrie de A, en notant $\alpha = \langle f(e'_2), e'_3 \rangle$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Pour conclure, nous avons bien montré que pour tout endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$, il existe une BON de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Edhec 2023

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice, sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : étude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ensuite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c+1}} dt$$

On reconnait une intégrale de Riemann, qui converge car $c + 1 > 3 > 1$. Posons $A > 1$.

$$I_A = \int_1^A \frac{c}{t^{c+1}} dt = \int_1^A c.t^{-c-1} dt = [-t^{-c}]_1^A = 1 - \frac{1}{A^c} \to_{A \to +\infty} 1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{c}{t^{c+1}} dt = 1$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [1, +\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2.
- X admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante est (absolument) convergente (la fonction est positive) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt = c.\int_1 +\infty \frac{1}{t^c}dt$$

On reconnait une intégrale de Riemann, qui converge car $c > 2 > 1$. Donc $E(X)$ existe. Posons encore $A \geq 1$:

$$J_A = \int_1^A \frac{1}{t^c}dt = \int_1^A t^{-c}dt = [\frac{1}{-c+1}.t^{-c+1}]_1^A = \frac{1}{c-1} - \frac{1}{(c-1).A^{c-1}} \to_{A\to+\infty} \frac{1}{c-1}$$

D'où $E(X) = \frac{c}{c-1}$.
- X^2 admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante est (absolument) convergente (la fonction est positive) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f(t)dt = c.\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{c-1}}dt$$

On reconnait encore une intégrale de Riemann, qui converge car $c-1 > 1$. Donc $E(X^2)$ existe et $V(X)$ existe. Posons encore $A \geq 1$:

$$K_A = \int_1^A \frac{1}{t^{c-1}}dt = \int_1^A t^{-c+1}dt = [\frac{1}{-c+2}.t^{-c+2}]_1^A = \frac{1}{c-2} - \frac{1}{(c-2).A^{c-2}} \to_{A\to+\infty} \frac{1}{c-2}$$

car $c-2 > 0$. Donc $E(X^2) = \frac{c}{c-2}$. On en déduit que

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{c}{(c-2)} - \frac{c^2}{(c-1)^2} = \frac{c.(c-1)^2 - c^2.(c-2)}{(c-2)(c-1)^2} = \frac{c}{(c-2).(c-1)^2}$$

- Bilan : $\boxed{E(X) = \frac{c}{c-1}}$ $\boxed{V(X) = \frac{c}{(c-2).(c-1)^2}}$

3. Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, on peut déjà dire que pour tout $x < 1$, $F_X(x) = 0$. Soit $x \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_1^x f(t)dt \\ &= 1 - \frac{1}{x^c} \text{ d'après les calculs faits en première question} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}}$

4. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que f. On note G sa fonction de répartition.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) = P(\ln(X) \leq x) \\ &= P(X \leq e^x) \text{ par stricte croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \\ &= F(e^x) \end{aligned}$$

La question étant très facile, il ne faut surtout pas oublier l'argument de stricte croissance !!!

(b) On en déduit que si $x < 0$, comme $e^x < 1$, $G(x) = 0$. Si $x \geq 0$,

$$G(x) = F(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^c} = 1 - e^{-cx}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre c !
Bilan : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c)}$

(c) Comme $Y = \ln(X)$, on a aussi $X = e^Y$. Nous allons donc simuler Y et en déduire une simulation de X.

```
def simulX(c):
    Y=rd.exponential(1/c)
    X=np.exp(X)
    return X
```

$\boxed{\text{Partie 2 : produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre } c}$

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c. On pose $Y_1 = \ln(X_1)$, $Y_2 = \ln(X_2)$ et $Z = X_1X_2$.

1.
```
def simulZ(c):
    X1=simulX(c)
    X2=simulX(c)
    return X1*X2
```

2. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, d'après le cours

$$E(Z) = E(X_1).E(X_2) = \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

Par coalition, X_1^2 et X_2^2 sont également indépendantes et donc

$$E(Z^2) = E(X_1^2).E(X_2^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

Enfin, par la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4} \\ &= \frac{c^2(c-1)^4 - c^4.(c-2)^2}{(c-2)^2.(c-1)^4} \\ &= \frac{c^2.((c-1)^2 - (c^2-2c))((c-1)^2 + (c^2-2c))}{(c-2)^2.(c-1)^4} \\ &= \frac{c^2.(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2.(c-1)^4} \end{aligned}$$

3. (a) Comme Y_1 et Y_2 suivent la loi $\mathcal{E}(c)$, d'après le cours, $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(b) Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, par lemme de coalition Y_1 et Y_2 sont indépendantes. De plus, $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. Par stabilité pour la somme de la loi γ, on peut donc dire que $\boxed{cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)}$

4. La fonction de répartition H de Y_1+Y_2 s'obtient grâce à celle de cY_1+cY_2. En effet, pour tout réel x, on a :

$$H(x)=P\left(Y_1+Y_2\leq x\right)=P\left(cY_1+cY_2\leq cx\right)=K(cx)$$

Comme K est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité suivant la loi $\gamma(2)$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 , donc il en est de même pour H. On peut donc dériver sauf en 0 et on obtient $H'(x)=c.k(cx)$, où k est une densité de la loi $\gamma(2)$.

On trouve alors, en posant $h(0)=0$, que la fonction h définie par $h(x)=\begin{cases} c^2x\mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$ est bien une densité de Y_1+Y_2.

5. On a $Y_1+Y_2=\ln\left(X_1\right)+\ln\left(X_2\right)=\ln(Z)$ et ainsi : $Z=\exp\left(Y_1+Y_2\right)$.

Comme Y_1 et Y_2 sont indépendantes et telles que $Y_1(\Omega)=Y_2(\Omega)=[0,+\infty[$, on a $\left(Y_1+Y_2\right)(\Omega)=[0,+\infty[$ donc $Z(\Omega)=[1,+\infty[$ et on a déjà $F_Z(x)=0$ si $x<1$.

Pour tout réel $x\geq 1$, on trouve : $F_Z(x)=H(\ln(x))$.

En dérivant sauf en 1, on obtient $f_Z(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}h(\ln(x)) & \text{si } x>1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$.

Pour $x>1$, on a $\ln(x)>0$ donc :

$$h(\ln(x))=c^2\ln(x)\mathrm{e}^{-c\ln(x)}=c^2\ln(x)\mathrm{e}^{\ln\left(x^{-c}\right)}=c^2\ln(x)\times x^{-c}=\frac{c^2\ln(x)}{x^c}$$

En posant $f_Z(1)=0$, une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x)=\begin{cases}\frac{c^2\ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$$

6. (a) Pour tout x supérieur ou égal à 1 , on pose $I(x)=\int_1^x\frac{\ln(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$. Les fonctions u et v, définies par $u(t)=\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}$ et $v(t)=\ln(t)$, sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ donc on peut procéder à une intégration par parties, ce qui donne :

$$I(x)=\frac{-\ln(x)}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{-1}{x^{\alpha-1}}+1\right)$$

Comme α est strictement supérieur à $1, I(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge, et après passage à la limite, on trouve :

$$\forall\alpha>1,\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

(b) Les intégrales $\int_1^{+\infty}xf_Z(x)\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty}x^2f_Z(x)\mathrm{d}x$ sont (absolument) convergentes et valent respectivement $c^2\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^c}\,\mathrm{d}x=\frac{c^2}{(c-1)^2}$ (car $c>1$) et $c^2\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{c-1}}\,\mathrm{d}x=\frac{c^2}{(c-2)^2}$(car $c-1>1$).

On retrouve bien $E(Z)=\frac{c^2}{(c-1)^2}$ et $E\left(Z^2\right)=\frac{c^2}{(c-2)^2}$, ce qui permet, comme dans la question 6), et toujours avec la formule de Koenig-Huygens, d'obtenir :

$$V(Z)=\frac{c^2\left(2c^2-4c+1\right)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

Problème : Edhec 2021

Partie 1 : calcul d'intégrales utiles pour la suite

1. On calcule :

$$I(p,0)=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1=\frac{1}{p+1}\text{ et }I(0,q)=\left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1=\frac{1}{q+1}$$

2. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties avec $u(x)=\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v(x)=(1-x)^q$. Ceci est licite car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. On a $u'(x)=x^p$ et comme $q\geqslant 1$: $v'(x)=-q(1-x)^{q-1}$ On obtient :

$$I(p,q)=\int_0^1 x^p\times(1-x)^q dx=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\times(1-x)^q\right]_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{x^{p+1}}{p+1}\times\left(-q(1-x)^{q-1}\right)dx$$
$$=0-0+\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx$$

On obtient bien :

$$\boxed{I(p,q)=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)}$$

3.
- Pour $q=0$. Pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a bien :

$$I(p,0)=\underbrace{\frac{p!0!}{(p+0)!}}_{=1}\times I(p+0,0)$$

- Soit $q\in\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $p\in\mathbb{N}$: $I(p,q)=\dfrac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$. Montrons que pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$I(p,q+1)=\frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}I(p+q+1,0)$$

Soit $p\in\mathbb{N}$. On applique la relation de la question 2 au couple $(p,q+1)$ qui est bien dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. On obtient :

$$I(p,q+1)=\frac{q+1}{p+1}I(p+1,q)$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$I(p+1,q)=\frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!}I(p+1+q,0)$$

Enfin, $\dfrac{(p+1)!}{p+1}=p!$ et $(q+1)q!=(q+1)!$. On obtient donc :

$$I(p,q+1)=\frac{q+1}{p+1}\times\frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!}I(p+1+q,0)=\frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}I(p+q+1,0)$$

4. En utilisant les questions 3 et 1 on obtient pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \times I(p+q,0) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \boxed{\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

1. - La fonction b_n est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ (fonction nulle) et aussi sur $]0;1[$ (polynôme). Donc b_n est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}\backslash\{0,1\}}$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [0;1]$, on a : $x \geqslant 0$ et $(1-x) \geqslant 0$ donc :

   $$b_n(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n \geqslant 0$$

   Sinon, $b_n(x) = 0$. Dans tous les cas on a : $\boxed{b_n(x) \geqslant 0}$
   - Enfin, sous réserve de convergence :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{b_n(x)}_{0} dx + \int_0^1 b_n(x)dx + \int_1^{+\infty} \underbrace{b_n(x)}_{0} dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n(1-x)^n dx$$

   Cette intégrale converge (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et par linéarité de l'intégrale :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)dx = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \underbrace{\int_0^1 x^n(1-x)^n dx}_{\text{on reconnaît } I(n,n)} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \boxed{= 1}$$

   Bilan : $\boxed{b_n \text{ est une densité de probabilité}}$

2. X_0 admet la densité f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Bilan : X_0 suit la $\boxed{\text{loi uniforme sur } [0;1]}$

3. (a) Sous réserve de convergence (absolue, mais X_n est à valeurs positives) :

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{n+1}(1-x)^n dx$$

Cette intégrale converge (intégrale d'une fonction continue sur un segment) donc X_n admet une espérance. Par linéarité :

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \underbrace{\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n dx}_{\text{on reconnaît } I(n+1,n)} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

On a bien : $\boxed{E(X_n) = \frac{1}{2}}$

(b) On commence par calculer $E(X_n^2)$ avec le théorème de transfert (sous réserve de convergence) :

$$E(X_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)dx$$

De même que pour $E(X_n)$, on montre que $E(X_n^2)$ existe et que :

$$E(X_n^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+2,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

X_n admet donc une variance et par formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)} = \boxed{\frac{1}{4(2n+3)}}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant P\left(|X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

autrement dit :

$$0 \leqslant P\left(|X_n - \frac{1}{2}| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \underbrace{\frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}}_{\text{tend vers 0 quand } n\to+\infty}$$

Par encadrement on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n - \frac{1}{2}| \geqslant \varepsilon\right) \text{ existe et vaut } 0$$

Bilan :

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\boxed{\text{converge en probabilité vers la variable certaine de valeur } \frac{1}{2}}$

Partie 3 : modèle de X_n, simulation informatique

1. $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2. (a) V_{2n+1} désigne le temps d'arrivée de la dernière personne.
Autrement dit : $\boxed{V_{2n+1} = \max(U_1,\dots,U_{2n+1})}$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(x) &= P(V_{2n+1} \leqslant x) \\ &= P\Big(\max(U_1,\dots,U_{2n+1}) \leqslant x\Big) \\ &= P([U_1 \leqslant x] \cap [U_2 \leqslant x] \cap \dots \cap [U_{2n+1} \leqslant x]) \end{aligned}$$

où , désigne une intersection. Par mutuelle indépendance des variables aléatoires U_1, ..., U_{2n+1} on a donc :

$$G_{2n+1}(x) = \underbrace{P(U_1 \leqslant x)}_{=F_U(x)} \times \underbrace{P(U_2 \leqslant x)}_{=F_U(x)} \times \dots \times \underbrace{P(U_{2n+1} \leqslant x)}_{=F_U(x)} = \Big(F_U(x)\Big)^{2n+1}$$

Bilan :

$$\boxed{G_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{2n+1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

3. (a) V_1 désigne le temps d'arrivée de la première personne. Autrement dit : $\boxed{V_1 = \min(U_1, \ldots, U_{2n+1})}$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$P(V_1 > x) = P\Big(\min(U_1, \ldots, U_{2n+1}) > x\Big) = P(U_1 > x, U_2 > x, \ldots, U_{2n+1} > x)$$

Par mutuelle indépendance des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_{2n+1}$ on a donc :

$$P(V_1 > x) = \underbrace{P(U_1 > x)}_{=1-F_U(x)} \times \underbrace{P(U_2 > x)}_{=1-F_U(x)} \times \cdots \times \underbrace{P(U_{2n+1} > x)}_{=1-F_U(x)} = \Big(1 - F_U(x)\Big)^{2n+1}$$

On a donc :

$$G_1(x) = P(V_1 \leqslant x) = 1 - P(V_1 > x) = 1 - \Big(1 - F_U(x)\Big)^{2n+1}$$

Bilan :

$$\boxed{G_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{2n+1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

4.

```
n = input('Entrez la valeur de n : ')
U = rd.uniform(0,1,2*n+1)
Vpremier=np.min(U) #V1
Vdernier=np.max(U) #V_{2n+1}
```

5. (a) Pour tout $x \in [0;1]$ on a :

$$G_{n+1}(x) = P(V_{n+1} \leqslant x)$$

L'événement $[V_{n+1} \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si, au moins $n+1$ personnes sont arrivées avant le temps x. Pour tout $k \in [\![n+1; 2n+1]\!]$ on note R_k l'événement :

$$R_k : \text{exactement } k \text{ personnes sont arrivées avant le temps } x$$

On a donc :

$$[V_{n+1} \leqslant x] = R_{n+1} \sqcup R_{n+2} \sqcup \cdots \sqcup R_{2n+1}$$

où $\sqcup$ désigne une union disjointe. On a donc :

$$G_{n+1}(x) = P\left(R_{n+1} \sqcup R_{n+2} \sqcup \cdots \sqcup R_{2n+1}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} P(R_k) \quad (1)$$

Soit $k \in [\![n+1; 2n+1]\!]$. On va montrer que :

$$P(R_k) = \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

On note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1; 2n+1]\!]$ ayant exactement k éléments. On a donc :

$$R_k = \bigsqcup_{J \in \mathcal{E}_k} \left(\left(\bigcap_{i \in J} [U_i \leqslant x] \right) \cap \left(\bigcap_{i \in [\![1;2n+1]\!] \setminus J} [U_i > x] \right) \right)$$

On a donc, par mutuelle indépendance des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_{2n+1}$:

$$P(R_k) = \sum_{J \in \mathcal{E}_k} \underbrace{\prod_{i \in J} P(U_i \leqslant x)}_{x^k} \times \underbrace{\prod_{i \in [\![1;2n+1]\!] \setminus J} P(U_i > x)}_{(1-x)^{2n+1-k}} = \sum_{J \in \mathcal{E}_k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

Enfin, l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est de cardinal $\binom{2n+1}{k}$. On a donc bien :

$$P(R_k) = \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k} \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent le résultat souhaité :

$$\boxed{G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}}$$

(b) Comme V_{n+1} est à valeurs dans $[0;1]$ on a aussi : pour tout $x < 0$: $G_{n+1}(x) = 0$ et pour tout $x > 1$: $G_{n+1}(x) = 1$. G_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1. On trouve une densité g_{n+1} de V_{n+1} en dérivant G_{n+1} en tout point $x \neq 0, 1$. Donc si $x < 0$ ou $x > 0$: $g_{n+1}(x) = 0$. Et si $x \in]0;1[$, par linéarité de la dérivation :

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} - (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k} \right)$$

donc

$$g_{n+1(x)} = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k}}_{\text{on note } S_1 \text{ cette somme}} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k}}_{\text{on note } S_2 \text{ cette somme}}$$

On ré-écrit la somme S_1 :

$$S_1 = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!} x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k}$$

On ré-écrit maintenant la somme S_2. Comme le terme $(2n+1-k)$ vaut 0 pour $k = 2n+1$, on a :

$$S_2 = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} x^k (1-x)^{2n-k}$$

On fait un changement d'indice $i = k + 1$. On obtient :

$$S_2 = \sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(i-1)!(2n+1-i)!} x^{i-1}(1-x)^{2n+1-i}$$

On a donc :

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} - \sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(i-1)!(2n+1-i)!} x^{i-1}(1-x)^{2n+1-i}$$

Il ne reste que le terme $k = n + 1$ de la première somme :

$$g_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{n!n!} x^n (1-x)^n$$

Enfin on pose $g_{n+1}(0) = g_{n+1}(1) = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} 0^n$. On a obtenu la densité suivante de V_{n+1} :

$$\boxed{g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } non \end{cases}}$$

On reconnaît la fonction b_n, densité de X_n.
Bilan : $\boxed{\text{les variables aléatoires } X_n \text{ et } V_{n+1} \text{ ont la même densité donc elles ont la même loi}}$

(c) Le programme renvoie la valeur médiane du tableau `U` c'est-à-dire $\boxed{8}$ En effet :

$$1 \leqslant 2 \leqslant 5 \leqslant 8 \leqslant 9 \leqslant 13 \leqslant 23$$

(d) D'après la question 12.b, il suffit de simuler la variable aléatoire V_{n+1}, c'est-à-dire la $\boxed{\text{valeur médiane}}$ de $U_1, \ldots, U_{2n+1}$. D'où le programme suivant :

```
n = int(input('Entrez la valeur de n : '))
U = rd.uniform(0,1,2*n+1)
X = np.median(U) # simulation de Xn
```