

Corrigé du Sujet Maths 2 2023 - Maths Agro

Questions préliminaires

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

d'où $x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{n} = x$, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} - 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$

$$\Rightarrow -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq -\frac{n}{2} \Rightarrow n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, par entraînement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = +\infty$$

Première partie: la loi Arcsinus

3. (a) $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))$$

Or $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$.

$$\text{D'où } \cos^2(\text{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow |\cos(\text{Arcsin}(x))| = \sqrt{1 - x^2}$$

Enfin, $\text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geq 0$.

$$\text{D'où: } \forall x \in [-1, 1], \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

(b) * la fonction sin étant continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$, d'après le th. de la bijection la fonction Arcsin est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

* sin est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\sin'(x) = \cos(x) \neq 0.$$

Donc Arcsin est dérivable sur $\sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[$.

⚠ $\sin'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin'(-\frac{\pi}{2}) = 0$ donc

Arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1 .

$\forall x \in]-1, 1[$,

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

4. (a) $\forall x \in [0; 1], G(x) = 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

• $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; 1]$, à valeurs dans $[0; 1]$.

Laune Arctan est continue sur $[0; 1]$, par composition

G est continue sur $[0; 1]$.

• $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; 1[$, à valeurs dans $]0; 1[$

Laune Arctan est dérivable sur $]0; 1[$, par composition

G est dérivable sur $]0; 1[$.

$\forall x \in]0; 1[$,

$$G'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{Arctan}'(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

D'au $g(x) = G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

(b) $\forall x \in]0; 1[, g(x) = (x-x^2)^{-1/2}$.

g est dérivable sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[$,

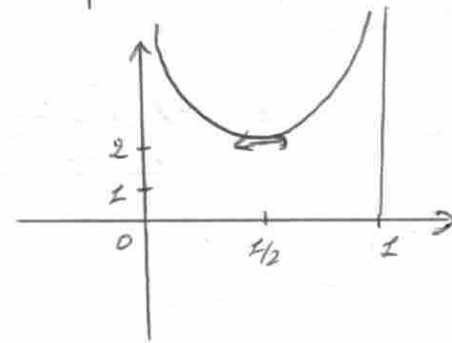
$$g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1-2x) \cdot (x-x^2)^{-3/2} = -\frac{1-2x}{2(x(1-x))^{3/2}}$$

$$= \frac{2x-1}{2(x(1-x))^{3/2}} \text{ du signe de } 2x-1.$$

(2)

x	0	1/2	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$	$+\infty$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$



5,

(a) f est positive, continue sur $]0; 1[$

$\forall$ Soit $(A, B) \in]0; 1[^2, A < B$.

$$\begin{aligned} \int_A^B g(t) dt &= G(B) - G(A) \\ &= 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{B}) - 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{A}) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

$A \rightarrow 0$
 $B \rightarrow 1$

D'au $\int_0^1 g(t) dt = \pi$ et $\int_0^1 f(t) dt = 1$.

Bilan: f est une densité de probabilité.

(b) $X(\Omega) =]0; 1[$.

X est une variable bornée donc $E(X)$ existe.

$$E(X) = \int_0^1 \frac{1}{\pi} \cdot \frac{t}{\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

Posez $u = 1-t$. Changement de variables affine dans l'intégrale.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^0 \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1-u}{\sqrt{u(1-u)}} \cdot (-1) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{u(1-u)}} du \end{aligned}$$

D'ici

$$E(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du - E(X)$$

$$\Rightarrow 2E(X) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = 1$$

$$\Rightarrow \underline{E(X) = \frac{1}{2}}$$

6. (a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ et $V = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}U\right)$. (3)

$V(\Omega) = [0; 1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x < 0$, $F_V(x) = 0$ • Si $x > 1$, $F_V(x) = 1$

• Si $x \in [0; 1]$,

$$F_V(x) = P\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq x\right) = P\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}U\right) \leq \sqrt{x}\right)$$

car $\frac{\pi}{2}U \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$= P\left(\frac{\pi}{2}U \leq \text{Arcsin}(\sqrt{x})\right)$$

par croissance de Arcsin

$$= P\left(U \leq \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\sqrt{x})\right)$$

$$= F_U\left(\frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\sqrt{x})\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\sqrt{x}) \quad \text{car } \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\sqrt{x}) \in [0; 1]$$

$$= F_X(x)$$

car X a pour fonction de répartition

$$F_X: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} \text{Arcsin}(\sqrt{x}) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Bilan: V suit la loi Arcsinus.

Il s'agit de la méthode d'inversion.

(b) def arctano(1):

$$U = rd(1)$$

$$V = np.\sin(np.pi/2 * U) ** 2$$

7.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ et $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

Alors $\frac{k+1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{k}{n} \leq \frac{1}{2}$.

Comme la fonction g est décroissante sur $[0; \frac{1}{2}]$,

$\forall x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ on a $g(x) \leq g(\frac{k}{n})$.

* la fonction G est continue sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$,
dérivable sur $] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$. D'après

l'égalité des accroissements finis:

$$\exists x \in] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$$

$$\frac{G(\frac{k+1}{n}) - G(\frac{k}{n})}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}} = G'(x) = g(x) \leq g(\frac{k}{n})$$

$$\Rightarrow G(\frac{k+1}{n}) - G(\frac{k}{n}) \leq \frac{1}{n} \cdot g(\frac{k}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

Donc

$$G(\frac{k+1}{n}) - G(\frac{k}{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

* On a aussi $\forall x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $g(x) \geq g(\frac{k}{n})$
(toujours par décroissance de g sur $[0; \frac{1}{2}]$).

En adaptant les résultats ci-dessus:

$$G(\frac{k}{n}) - G(\frac{k-1}{n}) \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

Bilan: $\forall n \geq 4$, $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$,

$$G(\frac{k+1}{n}) - G(\frac{k}{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \leq G(\frac{k}{n}) - G(\frac{k-1}{n})$$

* Si $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 1$,

alors $\frac{k-1}{n} \geq \frac{1}{2}$. Comme g est croissante

sur $[\frac{1}{2}, 1]$, en reprenant tous les résultats
ci-dessus on obtient

$$G(\frac{k+1}{n}) - G(\frac{k}{n}) \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \geq G(\frac{k}{n}) - G(\frac{k-1}{n})$$

8.7 Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

$a_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ convient par encadrement car :

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n}x \leq a_n$
 $n \geq 2$

et $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor < \lfloor nx \rfloor$ pour assez grand

• $a_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \sim \sqrt{n}x$ d'après 1.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

* $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

donc $0 \leq nx \leq \frac{n}{2}$

Si $k \leq \lfloor nx \rfloor$ alors $k \leq \frac{n}{2} - 1$.

Donc $\forall k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]$ on a $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$.

on peut appliquer l'encadrement du 7.

$$\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

(5)

$$\Rightarrow G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) - G\left(\frac{a_n}{n}\right)$$

$$\leq \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) - G\left(\frac{a_n-1}{n}\right)$$

On : • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ et G continue en x

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) = G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ et G continue en 0,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} G\left(\frac{a_n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G\left(\frac{a_n-1}{n}\right) = G(0) = 0$

car $\text{Arctan}(0) = 0$

Bilan : par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x)$$

Deuxième partie : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

$$Y_i(\omega) = \{0, 1\}$$

$$\text{et } P(Y_i = 1) = P(X_i = 1) = \theta \text{ donc } Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\theta).$$

$$\frac{1}{2}(S_n + n) = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, par coalition il en est de même pour $Y_1, \dots, Y_n$.

$$\text{Donc } \frac{1}{2}(S_n + n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta).$$

10. Les variables $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Par exemple,

$$P([S_1 = -1] \cap [S_2 = 2]) = 0$$

$$\text{alors que } P(S_1 = -1) = 1 - \theta \text{ donc } P(S_1 = -1) \times P(S_2 = 2) \neq 0$$
$$P(S_2 = 2) = \theta^2$$

$$11. \forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{S}_n = \frac{1}{n} S_n.$$

* De façon classique, via une étude de fonction, (6)
on montre que $\forall \theta \in]0; 1[, \theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow \sqrt{\theta(1-\theta)} \leq \frac{1}{2}.$

$$\text{* On sait que } \frac{1}{2}(S_n + n) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta)$$

$$\text{donc } E\left(\frac{1}{2}(S_n + n)\right) = n\theta \Rightarrow E(S_n) = 2n\theta - n$$

$$\Rightarrow E(\bar{S}_n) = 2\theta - 1$$

$$\text{et } V\left(\frac{1}{2}(S_n + n)\right) = n\theta(1-\theta) \Rightarrow V(S_n) = 4n\theta(1-\theta)$$
$$\Rightarrow V(\bar{S}_n) = \frac{4\theta(1-\theta)}{n}.$$

$$\text{Soit } \bar{S}_n^* = \frac{\bar{S}_n - E(\bar{S}_n)}{\sqrt{V(\bar{S}_n)}} = \frac{\bar{S}_n - (2\theta - 1)}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}} \cdot \sqrt{n}$$

Comme $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance et une variance, d'après le Théorème central limite,

$$\bar{S}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$

D'au

$$P(|S_n^*| \leq t_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(|N| \leq t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$$

et

$$P(|S_n^*| \leq t_\alpha) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\theta(\theta+1)}} (\bar{S}_n - 2\theta + 1)\right| \leq t_\alpha\right)$$

$$= P(|\bar{S}_n - 2\theta + 1| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha \cdot 2\sqrt{\theta(\theta+1)})$$

$$\leq P(|\bar{S}_n - 2\theta + 1| \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}) \text{ car } 2\sqrt{\theta(\theta+1)} \leq 1.$$

De plus :

$$[|\bar{S}_n - 2\theta + 1| \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}] = [2\theta - 1 - \bar{S}_n \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right)\right]$$

D'au

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right)\right) \geq 1 - \alpha$$

(7)

Bilan: $\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right); \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{S}_n\right)\right]$

est un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$[S_n = 0]$ est réalisée si le nombre de sauts de 1 est égal au nombre de sauts de -1 , ceci implique que n est pair.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $[S_{2k+1} = 0]$ est impossible

donc $\underline{P(S_{2k+1} = 0) = 0}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$[S_{2k} = 0]$ est réalisée si le nombre d'événements $[X_i = 1]$ est égal au nombre d'événements $[X_j = -1]$.

L'ordre des sauts étant fini, par exemple

$$[X_1 = 1] \cap \dots \cap [X_k = 1] \cap [X_{k+1} = -1] \cap \dots \cap [X_{2k} = -1]$$

la probabilité d'un tel événement est égale à $\theta^k (1 - \theta)^k$ (par indépendance des X_i)

le nombre d'événements de ce type est égal
au nombre de choix de k éléments (les $[X_i = 1]$)
parmi les $2k$ premiers possibles, d'où $\binom{2k}{k}$ choix.

D'où:

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k.$$

On:

$$\begin{aligned} P(S_{2k} = 0) &= P\left(\frac{1}{2}(S_{2k} + 2k) = k\right) \\ &= \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k \text{ d'après le 9. !} \end{aligned}$$

Bien plus efficace!!

13. $[L_n = n]$ est réalisé si la marche aléatoire
prend la valeur 0 à l'instant $2n$,
aucune condition n'étant requise sur ce qui précède.
D'où $P(L_n = n) = P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \theta^n (1-\theta)^n$.

14. Soit $k \in [0, n-1]$.

(a) $[L_n = k]$ est réalisé si:

$$\bullet S_{2k} = 0 \quad \bullet \text{ mais } S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0$$

d'où en effet:

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+2} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$$

(b) Sachant que $[S_{2k} = 0]$, l'étude des
déplacements suivant revient au même que l'étude
en partant de $[S_0 = 0]$ d'où:

$$\begin{aligned} P_{[S_{2k}=0]}([S_{2k+2} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]) \\ = P([S_2 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2(n-k)} \neq 0]) \\ = p_{n-k} \end{aligned}$$

15. Si $k = n$, $P(L_n = n) = \binom{2n}{n} \theta^n (1-\theta)^n \cdot \underbrace{p_0}_{=1}$
et la relation est vraie.

• Si $k \in [0, n-1]$,

$$P(L_n = k) = P(S_{2k} = 0) \times P_{[S_{2k}=0]}([S_{2k+2} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0])$$

D'ici

$$P(L_n = k) = \binom{2n}{k} \theta^k (1-\theta)^{2n-k} \quad \text{d'après le th. (b)}$$

1) $\theta = \frac{1}{2}$ dans la suite

16. (a) $\forall \omega \in \Omega$, la suite se augmente à chaque fois de ± 1 ou que l'on diminue de ± 1 , en notant $m = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} S_k(\omega)$ et $\pi = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} S_k(\omega)$,

$$\text{on a } \{S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\} = [m; \pi].$$

Il s'agit en effet d'un intervalle d'entiers.

(b) Comme $\{S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\} = [m; \pi]$,

si $0 \notin [m; \pi]$, on a soit:

- $\pi < 0$ et $\forall k \in [1; n]$, $S_k(\omega) < 0$

- $m > 0$ et $\forall k \in [1; n]$, $S_k(\omega) > 0$

D'ici $D_n = D_n^+ \cup D_n^-$ et par indépendance,

$$P(D_n) = P(D_n^+) + P(D_n^-)$$

(9)

18. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(a) Soit $(r, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned} & A_{n-1, q} \cap A_{n, r} \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-3} [S_k > 0] \right) \cap [S_{2n-2} = 2q] \\ & \quad \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [S_k > 0] \right) \cap [S_{2n} = 2r] \end{aligned}$$

Pour que ceci soit possible, il faut que l'on ait $2r = 2q \Leftrightarrow r = q$ ou $2r = 2q + 2 \Leftrightarrow r = q + 1$ ou $2r = 2q - 2 \Leftrightarrow r = q - 1$ (et $q > 0$)

Donc $P(A_{n-1, q} \cap A_{n, r}) = 0$ si $q \notin \{r-1, r, r+1\}$.

• Si $q = r$:

$$\begin{aligned} A_{n-1, q} \cap A_{n, r} &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-3} [S_k > 0] \right) \cap [S_{2n-2} = 2q] \\ & \quad \cap [X_{2n-1} = \pm 1] \cap [X_{2n} = \pm 1] \\ & \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n-3} [S_k > 0] \right) \cap [S_{2n-2} = 2q] \cap [X_{2n-1} = -\pm 1] \cap [X_{2n} = \pm 1] \end{aligned}$$

X_{2n-1} et X_{2n} étant indépendantes de S_{2n-2} , on obtient aussi:

$$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,q}) = \frac{1}{4} P(A_{n-1,q}) = \frac{1}{2} a_{n-1,q}$$

Et de façon analogue,

$$A_{n-1,q} \cap A_{n,q+1} = A_{n-1,q} \cap [X_{2n-2}=1] \cap [X_{2n}=1]$$

d'où

$$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,q+1}) = \frac{1}{4} P(A_{n-1,q})$$

De même pour

$$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,q-1}) = \frac{1}{4} P(A_{n-1,q})$$

Bilan:

$$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = \begin{cases} \frac{1}{4} a_{n-1,q} & \text{si } q=r-1 \text{ ou } q=r+1 \\ \frac{1}{2} a_{n-1,q} & \text{si } q=r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{n,r} = \bigcup_{q=1}^{+\infty} [A_{n-1,q} \cap A_{n,r}]$$

d'où par compatibilité,

$$P(A_{n,r}) = \sum_{q=1}^{+\infty} P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r})$$

d'où

$$a_{n,r} = \frac{1}{4} a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2} a_{n-1,r} + \frac{1}{4} a_{n-1,r+1}$$

⚠ $(A_{n-1,q})_{q \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas un SCE...

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Prétendons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(n): \forall r \in \mathbb{N}^*, a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \left(\binom{n-1}{n+r-1} - \binom{n-1}{n+r} \right)$$

Initialisation: si $n=1$,

$$A_{1,r} = [S_1 > 0] \cap [S_2 = 2r]$$

$$\text{D'où } P(A_{1,r}) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } r=1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } n=1, \frac{1}{4^n} \left(\binom{1}{n} - \binom{1}{n+1} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } n=1 \end{cases}$$

Donc $g_1(1)$ vraie

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{4^n} \binom{2n-1}{n-1}$ est vraie

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$$a_{n,r} = \frac{1}{4} a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2} a_{n-1,r} + \frac{1}{4} a_{n-1,r+1}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \left(\binom{2n-3}{n+r-3} - \binom{2n-3}{n+r-2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \left(\binom{2n-3}{n+r-2} - \binom{2n-3}{n+r-1} \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \left(\binom{2n-3}{n+r-1} - \binom{2n-3}{n+r} \right)$$

$$= \frac{1}{4^n} \left[\binom{2n-3}{n+r-3} - \binom{2n-3}{n+r-2} + 2 \binom{2n-3}{n+r-2} - 2 \binom{2n-3}{n+r-1} + \binom{2n-3}{n+r-1} - \binom{2n-3}{n+r} \right]$$

$$= \frac{1}{4^n} \left[\underbrace{\binom{2n-3}{n+r-3} + \binom{2n-3}{n+r-2}}_{\substack{\text{(Pascal)} \\ = \binom{2n-2}{n+r-2}}} - \underbrace{\binom{2n-3}{n+r-1} + \binom{2n-3}{n+r}}_{= \binom{2n-2}{n+r}} \right]$$

$$= \frac{1}{4^n} \left[\binom{2n-2}{n+r-2} - \binom{2n-2}{n+r} \right] \quad (11)$$

$$= \frac{1}{4^n} \cdot \left[\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} - \left(\binom{2n-1}{n+r} - \binom{2n-1}{n+r+1} \right) \right] \quad (\text{Pascal encore!})$$

$$= \frac{1}{4^n} \left[\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right]$$

Donc $\frac{1}{4^n} \binom{2n-1}{n}$ est vraie.

Bilan: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right)$$

20. Tout d'abord, $\mathcal{D}_n^+ = \bigcup_{r=1}^n A_{n,r}$

d'où par incompatibilité,

$$|\mathcal{D}_n^+| = \sum_{r=1}^n a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \sum_{r=1}^n \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right)$$

$$P(D_n^+) = \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n} - \binom{2n-1}{n-1} \right) = \frac{1}{4^n} \binom{2n-1}{n}$$

Il est évident par raison de symétrie ($\theta = \frac{\pi}{2}$)
que $P(D_n^-) = P(D_n^+)$.

Enfin, $p_n = P(D_n) = 2 P(D_n^+)$

$$p_n = \frac{1}{4^n} \cdot 2 \cdot \binom{2n-1}{n}$$

$$2 \cdot \binom{2n-1}{n} = 2 \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n}$$

d'où:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}}$$

Rq: il s'agit de la probabilité pour qu'il n'y ait
aucun retour à l'origine lors des $2n$ premiers déplacements.

Troisième partie - Comportement asymptotique

21. (a)

def DernierPassage(n):

$L = 0$

$S = 0$

for i in range(1, 2*n+1):

$S = S + (2 * \text{rd.random()}) - 1$

if $S = 0$:

$L = i/2$

return L

(b) On simule $\frac{L_{100}}{100}$

On peut conjecturer que $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi

vers une loi Arcsinus!

(en étant un peu ambitieux !!)

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $2n = 2m$ (avec $m \in \mathbb{N}$).

On a $p_{2m} = \frac{1}{4^{2m}} \binom{4m}{2m}$

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{C_{n+1}}{C_n} &= \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 + 1/n}{1 + 1/n} \\ &= \sqrt{1 + 1/n} \cdot \frac{1 + 1/2n}{1 + 1/n} = \frac{1 + 1/2n}{\sqrt{1 + 1/n}} \end{aligned}$$

Donc

$$\ln\left(\frac{C_{n+1}}{C_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2 \cdot (2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Car au voisinage de 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'où

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{8n^2} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^2}$.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par critère d'équivalence

(termes positifs), la série de t.g. $(u_{n+1} - u_n)$ converge.

(b) Or, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$ d'après (a), et

$$S_{n-1} = u_n - u_1 = \ln(C_n) - u_1$$

$$\text{D'où } C_n = e^{\ln(C_n)} = e^{S_{n-1} + u_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{l + u_1}$$

Bilan: la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

23.

$$P\left(\frac{C_n}{n} \leq x\right) = P(L_n \leq nx)$$

$$= P(L_n \leq \lfloor nx \rfloor) \quad \text{car } L_n(\mathbb{Z}) = [0; n]$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(L_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{4^{n-k}} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k}$$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \cdot \binom{2(n-k)}{n-k} \quad \text{d'après ce qui précède}$$

24. On rappelle que $C_k = \frac{\sqrt{2k}}{4^k} \binom{2k}{k}$

$$C_{n-k} = \frac{\sqrt{2(n-k)}}{4^{n-k}} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

D'ici

$$\frac{1}{4^n} \cdot \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k(n-k)}} \cdot C_k C_{n-k}$$

D'ici: pour n suffisamment grand (pour avoir $1 \leq a_n \leq \lfloor nx \rfloor$)

$$\sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \leq P_n \cdot \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{2k(n-k)}}$$

$$\text{car } m_n = \min \{ C_k C_{n-k} / k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor] \}$$

$$P_n = \max \{ C_k C_{n-k} / k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor] \}$$

(ce min et ce max existent car $[a_n, \lfloor nx \rfloor]$ est un ensemble fini).

(c) Par définition de la limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n \geq N, \left| C_n - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |C_n - \frac{1}{\sqrt{n}}| \leq \varepsilon$.
 Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$:

$$\exists n \in \mathbb{N} / \forall k \geq n, \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Alors $\forall i \geq n, |C_i - \frac{1}{\sqrt{i}}| \leq \varepsilon$.

En particulier: $\min_{i \in [n_k, p_k]} |C_i - \frac{1}{\sqrt{i}}| \leq \varepsilon$

$$\max_{i \in [n_k, p_k]} |C_i - \frac{1}{\sqrt{i}}| \leq \varepsilon$$

Bilan: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \min_{k \in [a_n, p_n]} C_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{k \in [a_n, p_n]} C_k = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(d) n° D'après le b, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x)$$

$$\forall k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor],$$

$$\min_{k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]} C_k \leq C_k \leq \max_{k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]} C_k \leq \max_{i \in [n - \lfloor nx \rfloor, n - a_n]} C_i$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$,

$$\max_{k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]} C_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } \min_{k \in [a_n, \lfloor nx \rfloor]} C_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De plus, $n - \lfloor nx \rfloor \geq n - nx = n(1-x) \rightarrow +\infty$

d'où $\max_{i \in [n - \lfloor nx \rfloor, n - a_n]} C_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\min_{i \in [n - \lfloor nx \rfloor, n - a_n]} C_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Par encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\sqrt{x}}$$

24. (a) $a_n = \lfloor n^{1/4} \cdot x \rfloor$ devrait convenir.

(b)

26. $\forall x \in]0; \pm[$,

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{an-x} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \\ + \frac{1}{4^n} \cdot \sum_{k=an}^{(n+x)} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{6(x)}{n}$$

De plus, $\frac{L_n}{n}(\Omega) \subset]0; \pm[$.

On obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{6(x)}{6} & \text{si } 0 < x < \pm \\ \pm & \text{si } x \geq \pm \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{L_n}{n} \xrightarrow{d} X$$

Donc X suit la loi Arcsine.