DM n° 9 - pour le lundi 19 janvier 2026

Problème : produit scalaire et projection orthogonale

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE A : Etude d'un produit scalaire

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge.
   Etre précis et concis !!

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.

   On admet que l'application définie par : pour tout (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$,

   $$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

   est un produit scalaire. *Il fallait le démontrer dans le sujet de concours dont c'est adapté !!! A savoir faire ! Surtout la définie positivité...*

   Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

3. Calculer, pour tout (i, j) de $\mathbb{N}^2$, $\langle X^i, X^j\rangle$ et, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\|X^i\|$.

   On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par:

   - pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,
   - pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \ldots, Q_k)$ est une famille orthonormale.

4. (a) Déterminer Q_0 et Q_1 et vérifier que $Q_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.
   (b) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_k = (Q_0, \ldots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

   On définit la matrice $H_n = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par:

   $$\forall (i, j) \in [[1, n + 1]]^2,\ h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle.$$

   On note également A_n la matrice de la famille $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ dans la base $\mathcal{C}_n$.

   (a) **Étude du cas $n = 2$:**
      i. Expliciter la matrice H_2.
      Montrer que la matrice H_2 est inversible et vérifier que $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
      ii. Expliciter la matrice A_2 et calculer ${}^tA_2A_2$. Que remarque-t-on?

   (b) On note, pour tout (i, j) de $[[1, n + 1]]^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A_n.
      i. Justifier que la matrice A_n est inversible.
      ii. Justifier:

      $$\forall j \in [[1, n + 1]],\ X^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j}Q_{k-1}$$

      En déduire:

      $$\forall (i, j) \in [[1, n + 1]]^2,\ \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}$$

      iii. Montrer alors la relation: $H_n = {}^tA_nA_n$.

   (c) i. Montrer que la matrice H_n est inversible.
      ii. Établir (sans calcul) que la matrice H_n est diagonalisable.
      iii. Montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.
      (On pourra calculer, pour tout vecteur propre Y de H_n, ${}^tYH_nY$.)

PARTIE B : Etude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1\rangle \\ \langle P, X\rangle \\ \vdots \\ \langle P, X^n\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de R dans la base $\mathcal{B}_n$.

   (a) Montrer, pour tout i de $[[0, n]]$: $\langle R, X^i\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\langle X^i, X^k\rangle$.
   (b) Montrer:
   R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X] \iff \forall i \in [[0, n]],\ \langle P, X^i\rangle = \langle R, X^i\rangle$.

   En déduire: R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X] \iff V = H_n^{-1}U$.

2. **Retour au cas $n = 2$:**
   (a) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par:

   $$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ f(a, b, c) = \int_0^{+\infty} (a + bt + ct^2 - t^3)^2 e^{-t}dt.$$

   Justifier que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$ et préciser pour quelles valeurs de a, b, c ce minimum est atteint.