Corrigé du DM n° 11

Adapté de EML 2020 - Problème 2

PARTIE A : Etude d'un produit scalaire

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $t \mapsto P(t).e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ est impropre en $+\infty$ uniquement.
Si $P = 0$, la convergence de l'intégrale est immédiate.
Si $P \neq 0$, alors il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = a_n t^n + \cdots + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$
<u>Méthode 1 : plus rapide</u>
$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{+\infty} t^k.e^{-t}\ dt = \sum_{k=0}^{n} a_k.\Gamma(k+1)$$
et l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ est une combinaison linéaire d'intégrales convergentes (car $k+1>0$), donc converge.

<u>Méthode 2 : via $o_{t\to+\infty}(\frac{1}{t^2})$</u>
$$|t^2.P(t).e^{-t}| \sim_{t\to+\infty} t^2.|a_n||t|^n e^{-t} \sim_{t\to+\infty} |a_n||t|^{n+2}e^{-t} \to_{t\to+\infty} 0$$
donc $|P(t).e^{-t}| = o_{t\to+\infty}(\frac{1}{t^2})$.
Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 0$), par critère de négligeabilité, $\int_1^{+\infty} P(t).e^{-t}dt$ est absoument convergente, donc convergente. Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ converge.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \text{ converge}}$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \Gamma(k+1) = k!}$

<u>Remarque :</u> le sujet EML faisait faire le calcul de $\Gamma(k+1)$ (intégration par parties + récurrence) : il s'agissait donc d'une question de cours.

On admet que l'application définie par : pour tout (P,Q) de $\mathbb{R}[X]^2$,
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$
est un produit scalaire.

<u>Remarque :</u> l'énoncé EML le faisait démontrer : très classique mais attention aux arguments pour la définie positivité !!

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

3. Pour tout (i,j) de $\mathbb{N}^2$,
$$\boxed{\left\langle X^i, X^j\right\rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}dt = I_{i+j} = (i+j)!}$$

4. (a) L'énoncé nous met gentiment sur la piste de la méthode de Schmidt. On applique donc cette méthode, en partant de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Comme $||1||^2 = \langle 1,1\rangle = 1$ le vecteur $\boxed{Q_0 = 1}$ est déjà normé et donc convient. On considère ensuite
$$R_1 = X - \langle X, 1\rangle .1 = X - 1$$
car $\langle X, 1\rangle = \int_0^{+\infty} t.e^{-t} = 1$. On calcule sa norme
$$||R_1||^2 = \langle X-1, X-1\rangle = \langle X, X\rangle - 2\langle X, 1\rangle + \langle 1,1\rangle = 2! - 2 + 1 = 1$$
donc R_1 est normé et $\boxed{Q_1 = R_1 = X - 1}$ convient.
Enfin, on considère
$$\begin{aligned} R_2 &= X^2 - \left\langle 1, X^2\right\rangle .1 - \left\langle X-1, X^2\right\rangle .(X-1) \\ &= X^2 - 2 - (\left\langle X, X^2\right\rangle - \left\langle 1, X^2\right\rangle).(X-1) \\ &= X^2 - 2 - (6-2).(X-1) \\ &= X^2 - 4X + 2 \end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned} \|R_2\|^2 &= \left\langle X^2 - 4X + 2, X^2 - 4X + 2\right\rangle \\ &= \left\langle X^2, X^2\right\rangle - 4\left\langle X^2, X\right\rangle + 2\left\langle X^2, 1\right\rangle - 4\left\langle X, X^2\right\rangle \\ &\quad +16\langle X, X\rangle - 8\langle X, 1\rangle + 2\left\langle X^2, 1\right\rangle - 8\langle X, 1\rangle + 4\langle 1, 1\rangle \\ &= 24 - 8.6 + 20.2 - 16 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$
Donc $\|R_2\| = 2$ et $\boxed{Q_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2) = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1}$ convient.
On retrouve bien le résultat fourni par l'énoncé !!

(b) Pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_k = (Q_0, \ldots, Q_k)$ est une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$ non nuls, c'est donc une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$.
Comme de plus $Card(\mathcal{C}_k) = k + 1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$, il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_k[X]$.
<u>Bilan :</u> $\boxed{\mathcal{C}_k \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_k[X]}$

5. (a) **Étude du cas $n = 2$:**

i. Pour tout i et j, $h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = (i + j - 2)!$
Donc $\boxed{H_2 = \begin{pmatrix} 0! & 1! & 2! \\ 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}}$
Et $\begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Donc H_2 est inversible et $\boxed{H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

ii. On a $Q_0 = 1$, $Q_1 = X - 1$ et $Q_2 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= Q_0 = 1Q_0 + 0Q_1 + 0Q_2 \\ X &= (X-1)+1 = 1Q_0 + 1Q_1 + 0Q_2 \\ X^2 &= 2\left(\frac{1}{2}X^2 - 2X + 1\right) + 4(X-1) + 2 = 2Q_0 + 4Q_1 + 2Q_2 \end{aligned}$$

donc $\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

D'où $\boxed{{}^tA_2\, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} = H_2}$

(b) i. A_n est la matrice de passage de $\mathcal{C}_n$ dans $\mathcal{B}_n$ qui sont deux bases de $\mathbb{R}_n[X]$ $\boxed{\text{Donc } A_n \text{ est inversible}}$

ii. Par définition de la matrice A_n, les coefficients $(a_{k,j})_{k\in[[1,n+1]]}$ de la j-ème colonne de A_n sont les coordonnées de X^{j-1} dans la base $\mathcal{C}_n$ donc $\boxed{\forall j \in [[1;n+1]],\ X^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j}Q_{k-1}.}$

D'où $\forall (i,j) \in [[1,n+1]]^2$,

$$\begin{aligned} \left\langle X^{i-1}, X^{j-1}\right\rangle &= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} a_{k,i}a_{l,j}\left\langle Q_{k-1}, Q_{l-1}\right\rangle \\ &\qquad \text{où } \left\langle Q_{k-1}, Q_{l-1}\right\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq l \\ 1 \text{ si } k = l \end{cases} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j} \end{aligned}$$

<u>Bilan :</u> $\forall (i,j) \in [[1,n+1]]^2$, $\boxed{\left\langle X^{i-1}, X^{j-1}\right\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}}$

iii. On a donc par définition du produit matriciel, d'une part pour tout $(i,j) \in [[1,n+1]]^2$, $h_{i,j} = \left\langle X^{i-1}, X^{j-1}\right\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}$
et d'autre part $\left({}^tA_nA_n\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}a_{k,j}$

$\boxed{\text{Donc } H_n = {}^tA_nA_n.}$

(c) i. A_n est inversible donc ${}^tA_n$ également et donc
$\boxed{H_n \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles.}}$

ii.

$${}^tH_n = {}^t\left({}^tA_nA_n\right) = {}^tA_n\ {}^t\left({}^tA_n\right) = {}^tA_n\ A_n = H_n$$

$\boxed{\text{Donc } H_n \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable.}}$

iii. Soit α une valeur propre de H_n et Y un vecteur propre associé : $Y \neq 0$ et $H_nY = \alpha Y$. Alors

$${}^tY\ H_nY = {}^tY\ \alpha Y = \alpha \left\|Y\right\|^2$$

avec la norme canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. D'autre part,

$${}^tY\ H_nY = {}^tY\ {}^tA_n\ A_nY = {}^t(A_nY)\ A_nY = \left\|A_nY\right\|^2$$

toujours avec la norme canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$).

Comme $\|Y\| \neq 0$, $\alpha = \dfrac{\|A_nY\|^2}{\|Y\|^2}$.
Et comme A_n est inversible, et $Y \neq 0$ alors $A_nY \neq 0$ donc $\|A_nY\|^2 > 0$ et $\alpha > 0$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{les valeurs propres de } H_n \text{ sont strictement positives}}$

PARTIE B : Etude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1\rangle \\ \langle P, X\rangle \\ \vdots \\ \langle P, X^n\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) D'après l'énoncé, on a $R = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$.

$$\left\langle R, X^i\right\rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left\langle X^k, X^i\right\rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left\langle X^i, X^k\right\rangle$$

(b)

$$\begin{aligned} R \text{ est le projeté orthogonal de } P \text{ sur } \mathbb{R}_n[X] &\iff \begin{cases} R \in \mathbb{R}_n[X] \\ (P-R) \perp \mathbb{R}_n[X] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} R \in \mathbb{R}_n[X] \\ \forall i \in [[0,n]],\ \left\langle P-R, X^i\right\rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme R dans $\mathbb{R}_n[X]$, on a donc : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ ssi $\left\langle P-R, X^i\right\rangle = 0$, ssi $\left\langle P, X^i\right\rangle = \left\langle R, X^i\right\rangle$.

<u>Bilan :</u>
$\boxed{R \text{ est le projeté orthogonal de } P \text{ sur } \mathbb{R}_n \text{ ssi } \forall i \in [[0,n]],\ \left\langle P, X^i\right\rangle = \left\langle R, X^i\right\rangle}$

On a alors $\forall i \in [[0,n]]$,

$$\begin{aligned} &\left\langle R, X^i\right\rangle = \left\langle P, X^i\right\rangle \\ \Leftrightarrow\ &\sum_{k=0}^n \left\langle X^i, X^k\right\rangle.\alpha_k = \left\langle P, X^i\right\rangle \\ \Leftrightarrow\ &\sum_{k=0}^n h_{i+1,j+1}.v_{k+1} = u_{k+1} \quad \text{où } U = (u_k),\quad V = (v_k) \\ \Leftrightarrow\ &(H_nV)_{k+1} = U_{k+1} \end{aligned}$$

donc $H_nV = U$. La matrice H_n étant inversible, on en déduit bien que $\boxed{V = H_n^{-1}.U}$

2. **Retour au cas $n = 2$:**

(a) Avec les notations précédentes,

$$U = \begin{pmatrix} \left\langle X^3, 1\right\rangle \\ \left\langle X^3, X\right\rangle \\ \left\langle X^3, X^2\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3! \\ 4! \\ 5! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix}$$

D'après le A.4.(a) et le B.1.(b),

$$V = H_2^{-1}.U = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\text{le projeté orthogonal de } X^3 \text{ sur } \mathbb{R}_2[X] \text{ est } P = 9X^2 - 18X + 6}$

(b) On remarque que

$$\begin{aligned}
min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) &= min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (a+bt+ct^2-t^3)^2 e^{-t} dt \\
&= min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \left\| a+bX+cX^2-X^3 \right\| \\
&= min_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \left\| P-X^3 \right\|
\end{aligned}$$

D'après le théorème de minimisation par projection orthogonal, f admet un minimum et ce minimum est atteint lorsque P est le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
D'après la question précédente, $\boxed{\text{le minimum est atteint pour } a=6,\ b=-18 \text{ et } c=9}$

Remarque : le sujet EML faisait retrouver ce résultat via l'étude d'une fonction de trois variables (cf dernier chapitre), par quelques questions calculatoires.