DM n° 10 - pour le 26/01/2026

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme canonique. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de E.

Partie I : étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, $n = 2$ et a est un réel fixé.

Soit u et v les deux endomorphismes de E dont les matrices dans la base canonique sont

$$Mat_{\mathcal{C}}(u) = A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{C}}(v) = B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que u et v sont des projecteurs orthogonaux.
2. Déterminer le rang des endomorphismes u, v et $u \circ v$.
   Ne pas oublier de cas particulier !!
3. (a) Vérifier que $x = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
   (b) Déterminer le spectre de $u \circ v$ et justifier que $Spec(u \circ v) \subset [0, 1]$.
   (c) Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Partie II : cas général

On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Soit u et v deux projecteurs orthogonaux de E.

1. Soit p un projecteur orthogonal de E.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$ puis que $\|p(x)\|^2 \leq \|p(x)\| \,.\, \|x\|$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|(u \circ v)(x)\| \leq \|x\|$.
   En déduire que $Sp(u \circ v) \subset [-1, 1]$.
3. (a) Justifier que $f = v \circ u \circ v$ est un endomorphisme symétrique de E.
   (b) Soit μ une valeur propre de f associée au vecteur propre x_0.
   Prouver que $\|(u \circ v)(x_0)\|^2 = \mu . \|x_0\|^2$ puis que $\mu \geq 0$.
   (c) Justifier alors que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$.
4. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$ associée au vecteur propre x_1. Justifier que $v(x_1)$ est un vecteur propre de f. Préciser la valeur propre associée.
5. Justifier enfin que le spectre de $u \circ v$ est inclus dans $[0, 1]$.

Exercice 2

Les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance σ^2.
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de VAR indépendantes de même loi que X.
On considère la suite de VAR $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$Y_0 = \frac{X_0}{2} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = \frac{Y_n + X_{n+1}}{2}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X_k}{2^{n+1-k}}$$
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n admet une espérance et une variance.
   Déterminer $E(Y_n)$, $V(Y_n)$, $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} V(Y_n)$.
2. Cas particulier : on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et on note Φ la fonction de répartition de X.
   (a) Simulation : écrire un script `Python` simulant pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné les variables Y_n et S_n et affichant leur valeur.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de Y_n. On note F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, justifier que $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F(x)$ où F est la fonction de répartition d'une VAR Z suivant une loi normale de paramètres à préciser.

   On dit alors que la suite de VAR $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Z.
3. **Retour au cas général**
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et une variance.
   Déterminer $E(S_n)$ et $L = \lim_{n\to+\infty} E(S_n)$.
   (b) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i < j$. Justifier via le 1.a) que
   $$Cov(Y_i, Y_j) = \frac{\sigma^2}{3} . \frac{1}{2^{i+j+2}}(4^{i+1} - 1)$$
   (c) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, vérifier que $Cov(Y_i, Y_j) \leq \dfrac{\sigma^2}{3} . \dfrac{1}{2^{|j-i|}}$.
   (d) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} \leq 2n$$
   (e) Justifier alors que $\lim_{n\to+\infty} V(S_n) = 0$

Exercice 3 - facultatif : rédiger l'ex. 8 du TD Chap. 10 (produit de convolution pas facile, entrainement épreuve Maths2)