ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques 2025/26

Programme de colle - **Semaine 15**
du 26 janvier au 30 janvier 2026

`Informatique : programmation en Python`

En particulier :
Simulation de lois usuelles discrètes ou à densité : connaître la syntaxe.
Méthode d'inversion (guidée) pour simuler une variable à densité. Simulation de max, de min, de sommes de variables aléatoires...

Chapitre 9 - Algèbre bilinéaire II (suite et fin)

1. Endomorphismes symétriques
2. Matrices symétriques
3. Forme quadratique (définition uniquement.)
4. Projection orthogonale
   (a) Rappels sur les projecteurs : endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Un projecteur de E est la projection sur $F = Im(p)$ parallèlement à $G = Ker(p)$.
   (b) Définition d'un projecteur orthogonal : projection sur F, parallèlement à $F^{\perp}$.
   (c) $Im(P_F) = F$, $Ker(p_F) = F^{\perp}$, donc $Im(p_F) = (Ker(p_F))^{\perp}$, $p_F + p_{F^{\perp}} = Id_E$, $p_F \circ p_{F^{\perp}} = p_{F^{\perp}} \circ p_F = 0$.
   (d) p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si : p est un endomorphisme de E, $p \circ p = p$ et $Ker(p) \perp Im(p)$.
   (e) p **est un projecteur orthogonal de** $E \Leftrightarrow p$ **est un endomorphisme symétrique de** E **et** $p \circ p = p$.
   Conséquence : si $\mathcal{B}$ est une BON de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(p)$, p est un projecteur orthogonal ssi $A^2 = A$ et ${}^tA = A$.
   (f) **Caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur**
   Soit E un espace euclidien, soit F un sev de E, $u \in E$ et $v \in E$. Alors
   $\boxed{v = p_F(u) \Leftrightarrow v \in F \text{ et } u - v \in F^{\perp}}$
   Si $F = Vect(e_1, \cdots, e_m)$ alors $v = p_F(u)$ ssi $\left\{ \begin{array}{l} v \in F \\ \forall k \in [[1, m]], \quad (u - v) \perp e_k \end{array} \right.$.
   (g) **Caractérisation connaissant une BON de** F Soit E un espace euclidien. Soit F un sev de E muni d'une BON $(u_1, \cdots, u_m)$. Alors
   $$\boxed{\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x, u_k \rangle .u_k}$$
   Attention : il faut disposer d'une BON : éventuellement utiliser la méthode de Schmidt pour construire une BON
   (h) **Minimisation par projection orthogonale**.
   Soit E un e.v. euclidien, F un sev de E et $a \in E$ un vecteur fixé.
   Soit p_F la projection orthogonale sur F. L'application $h : F \to \mathbb{R}$, telle que $h(x) = \|a - x\|$ admet un minimum absolu, atteint uniquement en $p_F(a)$.
   (i) **Pseudo-solutions, moindres carrés** (difficile, on atteint les limites de notre programme !!)

Chapitre 10 - Vecteurs aléatoires

Réviser : toutes les lois usuelles (discrètes ou à densité), les théorèmes de stabilité pour les lois usuelles (par somme ou par combinaison linéaire).

1. Couples de variables aléatoires : notion de loi conjointe.
2. Théorème de transfert pour les couples de VARD : si X et Y sont deux VARD et $Z = g(X, Y)$ alors sous réserve de convergence,
$$E(Z) = \sum_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)} g(i, j).P([X = i] \cap [Y = j])$$
3. Cas du produit : si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance (*) (astuce à retenir !!) et
$$E(XY) = \sum_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)} ij.P([X = i] \cap [Y = j])$$
   Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X).E(Y)$.
4. Covariance
   (a) Définition : si deux VARD X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors leur covariance est définie par $Cov(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$.
   (b) Formule de Huygens pour la covariance : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
   (c) $Cov(X, X) = V(X)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
   (d) On en déduit $Cov(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$ (formule de polarité)
   (e) La covariance est une application bilinéaire symétrique et positive (mais pas définie positive).
   (f) Coefficient de corrélation linéaire : si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors
$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$
   (lettre grecque rho)
   (g) $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}$ (*) : Cauchy-Schwarz pour la covariance.
   On en déduit que $|\rho(X, Y)| \leq 1$.
   On a $|\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que l'on ait $Y = aX + b$ presque sûrement (i.e. $P(Y = aX + b) = 1$).
5. Vecteurs aléatoires
   (a) Un vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$ est la donnée de n VAR X_1, ..., X_n.
   Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$, c'est déterminer la fonction F_X : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où
$$F_X(x_1, \cdots, x_n) = P(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x_k])$$
   (b) Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires ayant la même loi.
   Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ (cf chapitre sur les fonctions de n variables).
   Alors les deux variables $g(X_1, \cdots, X_n)$ et $g(Y_1, \cdots, Y_n)$ ont la même loi.

(c) Si pour tout $k \in [[1,n]]$, X_k admet une espérance et si les variables X_k sont mutuellement indépendantes, alors $X_1.\cdots.X_n$ admet une espérance et

$$E(X_1.X_2.\cdots.X_n) = E(X_1).E(X_2).\cdots.E(X_n)$$

(d) Si pour tout $k \in [[1,n]]$, X_k admet un moment d'ordre 2 et si les X_k sont deux à deux indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance et

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

6. Vecteurs aléatoires discrets
Soit $(X_k)_{k\in[[1,n]]}$ une n-liste de VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Cette n-liste est appelée **vecteur aléatoire discret**
Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$, c'est donner,
pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k])$$

Les lois de X_1, ..., X_n sont appelées lois marginales.

. (*) : **preuve exigible**