DM n° 11 - pour le 03/02/26
2 exercices Edhec 2021

Révisez le chapitre 11 (convergence de VAR), puis cherchez ce sujet en 2h30 maxi en répartissant votre temps sur les deux exercices. Devoir en auto-correction, un corrigé sera posté le 3/02/26

Exercice 1 : analyse de 1ère année

1. Question préliminaire : on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

   (c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1 .

   (b) Étudier les variations de la suite (u_n), puis établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.

   (c) Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

```
n=1
u=1
S=1 #S_1=u0=1
while S<=1000:
    u=..........
    S=.........
    n=n+1
print(........)
```


3. Recherche d'un équivalent de u_n.

   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[1, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Utiliser la première question pour établir que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

4. (a) Exprimer S_n en fonction de u_n puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.

   (b) Compléter le script Python suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2c) sans calculer S_n :

```
n=0
u=1 #u0=1
while u<=.......:
    u=........
    n=n+1
print(.........)
```

Exercice 2 : probabilités

1. On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y = \mathrm{e}^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z.

   (a) Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.

   (b) En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite de Rademacher de paramètre p (avec $0 < p < 1$), et définie par :

$$P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = 1 - p$$

On considère de plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

2. (a) Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n.

   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$ et en déduire une relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$.

   (c) Écrire une autre relation vérifiée par $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$, puis en déduire la loi de T_n.

   (d) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.

3. Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.

   (a) Établir l'inclusion suivante :

   $$\left(|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right) \cap \left(|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right) \subset (|T_{n+1} - T_n| < 1)$$

   (b) En déduire l'inégalité :

   $$P\left(|T_{n+1} - T_n| \geq 1\right) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right)$$

   (c) Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1} - T_n$, que :

   $$P\left(|T_{n+1} - T_n| \geq 1\right) = 1 - p$$

   (d) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ?

4. Dans cette question on prend $p = \frac{1}{2}$.

   On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \mathrm{e}^{n\bar{X}_n}$.

   (a) On rappelle que $\bar{X}_n^*$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à $\bar{X}_n$. Exprimer $\bar{X}_n^*$ en fonction de $\bar{X}_n$.

   (b) Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $\left({U_n}^{1/\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.