ECG2 - Lycée Saint Just — Programme de colle - **Semaine 16**
Mathématiques 2022/23 — du 2 au 6 février 2026

`Informatique : programmation en Python`

En particulier :
Simulation de lois usuelles discrètes : uniforme, binômiale, Bernoulli, géométrique, Poisson.
Simulations de lois à densité : uniforme sur $[0, 1]$, uniforme sur $[a, b]$ en faisant une transformation affine, exponentielle, normale, petit gamma.
Méthode d'inversion (guidé) pour simuler une variable à densité.

Chapitre 10 - Vecteurs aléatoires

Réviser : toutes les lois usuelles (discrètes ou à densité), les théorèmes de stabilité pour les lois usuelles (par somme ou par combinaison linéaire).

1. Couples de variables aléatoires : notion de loi conjointe.
2. Théorème de transfert pour les couples de VARD : si X et Y sont deux VARD et $Z = g(X, Y)$ alors sous réserve de convergence,
$$E(Z) = \sum_{i\in X(\Omega),j\in Y(\Omega)} g(i, j).P([X = i] \cap [Y = j])$$
3. Cas du produit : si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance (*) (astuce à retenir !!) et
$$E(XY) = \sum_{i\in X(\Omega),j\in Y(\Omega)} ij.P([X = i] \cap [Y = j])$$
Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X).E(Y)$.
4. Covariance
   (a) Définition : si deux VARD X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors leur covariance est définie par $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(X - E(Y)))$.
   (b) Formule de Huygens pour la covariance : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
   (c) $Cov(X, X) = V(X)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
   (d) On en déduit $Cov(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$
   (e) La covariance est une application bilinéaire symétrique et positive (mais pas définie positive !).
   (f) Coefficient de corrélation linéaire : si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors
   $$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$
   (lettre grecque rho)
   (g) $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}$ (à savoir démontrer *) : Cauchy-Schwarz pour la covariance.
   On en déduit que $|\rho(X, Y)| \leq 1$.
   On a $|\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que l'on ait $Y = aX + b$ presque sûrement (i.e. $P(Y = aX + b) = 1$).

5. Vecteurs aléatoires
   (a) Un vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$ est la donnée de n VAR X_1, ..., X_n.
   Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$, c'est déterminer la fonction F_X : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où
   $$F_X(x_1, \cdots, x_n) = P(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leq x_k])$$
   (b) Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires ayant la même loi.
   Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ (cf chapitre sur les fonctions de n variables).
   Alors les deux variables $g(X_1, \cdots, X_n)$ et $g(Y_1, \cdots, Y_n)$ ont la même loi.
   (c) Si pour tout $k \in [[1, n]]$, X_k admet une espérance et si les variables X_k sont mutuellement indépendantes, alors $X_1. \cdots .X_n$ admet une espérance et
   $$E(X_1.X_2. \cdots .X_n) = E(X_1).E(X_2). \cdots .E(X_n)$$
   (d) Si pour tout $k \in [[1, n]]$, X_k admet un moment d'ordre 2 et si les X_k sont deux à deux indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance et
   $$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$
6. Vecteurs aléatoires discrets
   Soit $(X_k)_{k\in[[1,n]]}$ une n-liste de VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
   Cette n-liste est appelée **vecteur aléatoire discret**
   Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$, c'est donner,
   pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,
   $$P(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_k])$$
   Les lois de X_1, ..., X_n sont appelées lois marginales.

Chapitre 11 - Convergence de variables aléatoires (tout)

1. Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev (rappel)
2. Convergence en probabilité
   (a) Définition : On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité vers la variable aléatoire** X lorsque :
   $$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\Big(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$$
   On note alors $X_n \xrightarrow{P} X$.
   (b) Méthode : on utilise souvent (mais pas toujours) l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (c) Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, et si la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
   (d) **(Nouveau)** si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

(e) **Loi faible des grands nombres** (*)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles.
Notons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Si :

- les variables X_n sont **indépendantes**,
- elles admettent toutes la **même espérance** notée m et la **même variance** notée σ^2,

alors la suite $(\overline{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à m :
$X_n \xrightarrow{P} m$

3. Convergence en loi

(a) Définition **via la fonction de répartition**. **Cas des VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$: on utilise la loi.**

(b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Preuve guidée à savoir refaire : (*)

i. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

ii. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

(c) Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, et si la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

4. Théorème Central Limite

(a) Le T.C.L
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires.
Soit m un réel et σ un réel strictement positif.
On suppose que :

- les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes,
- les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont identiquement distribuées (elles suivent la même loi),
- toutes ces variables aléatoires admettent une même espérance m et une même variance notée σ^2.

On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. La variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X_n}$ est :

$$\overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V\left(\overline{X}_n\right)}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$$

Alors

la suite $(\overline{X_n}^{\,*})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

$$\overline{X_n}^{\,*} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \text{où } Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

(b) Convergence de la loi binômiale vers la loi normale : à savoir retrouver en étant un peu guidé.

(c) Convergence de la loi de Poisson vers la loi normale : à savoir retrouver en étant un peu guidé.

. (*) : **preuve exigible**