
Exercices - Chapitre 12 - Estimation et intervalles de confiance

Exercice 1

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. telles que :

$$P(X_1 = -1) = (1-p)^2, \quad P(X_1 = 0) = 2p(1-p), \quad P(X_1 = 1) = p^2$$

On cherche à estimer $p \in]0, 1[$. Montrer que

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1 + X_k}{2n}$$

est un estimateur sans biais et convergent de p .

Exercice 2

Soient λ un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) indépendant identiquement distribué de la loi exponentielle de paramètre λ que l'on cherche à estimer.

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $Y_n = \frac{1}{S_n}$

1. Déterminer un estimateur sans biais et convergent de $\frac{1}{\lambda}$.
2. Déterminer la loi de $T_n = \lambda S_n$.
3. Justifier que S_n est une variable à densité puis déterminer une densité de S_n .
4. Montrer que Y_n admet une espérance et une variance et les calculer.
5. En déduire un estimateur sans biais du paramètre λ .
6. Cet estimateur est-il convergent?

Exercice 3

Recherche d'un intervalle de confiance

On désigne par α un réel donné de $]0, 1[$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi normale de paramètres m et 1.

On note, pour tout entier naturel non nul, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

1. On note $Y_n = \sqrt{n} (\bar{X}_n - m)$. Quelle est la loi de Y_n ?
2. (a) Justifier l'existence d'un réel t_α strictement positif tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
(b) Montrer que $P(-t_\alpha \leq Y_n \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$.
(c) En déduire un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 4

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon i.i.d. issu de la variable aléatoire X qui admet une espérance μ et une variance σ^2 .

On note $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ et $Z_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.

1. Montrer que T_n admet une espérance et $E(T_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$.
2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = \sigma^2$.
On dit alors que T_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2 - cette notion est HP
3. Montrer que Z_n est un estimateur sans biais de σ^2 .

Exercice 5

Soit θ un paramètre réel strictement positif.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire ayant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{2t}{\theta^2} \cdot \mathbb{1}_{[0, \theta]}(t)$$

On considère $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. (a) Vérifier que f est une densité de probabilité. On notera X une variable aléatoire à densité de densité f .
(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable X .
(c) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
2. (a) Calculer $E(\bar{X}_n)$ et $V(\bar{X}_n)$.
(b) Construire à partir de \bar{X}_n un estimateur sans biais convergent du paramètre θ . On le notera T_n .
3. Appliquer le Théorème Central Limite à la variable \bar{X}_n .
En déduire un intervalle de confiance asymptotique de θ , au niveau de confiance 95%.
Si on note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on donne, pour $t = 1,96$: $2\Phi(t) - 1 = 0,95$
4. Soit G_n la variable aléatoire définie par : $G_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$.
(a) Déterminer une densité de la variable G_n .
(b) Calculer l'espérance et la variance de G_n , puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(G_n) = \theta$.
(c) Construire, à l'aide de G_n un estimateur sans biais et convergent de θ noté W_n .
5. Simulation On suppose dans cette question que $\theta = 1$ pour simplifier un peu.
(a) A l'aide de la méthode d'inversion, écrire une ligne de code permettant de simuler la variable X .
(b) Ecrire un programme qui simule $N = 1000$ fois les deux estimateurs T_n et W_n , avec $n = 100$. Puis tracer les deux histogrammes des valeurs prises par ces estimateurs (on pourra s'inspirer de l'exercice du cours !).
(c) Quel semble être le meilleur de ces deux estimateurs ?
6. Démontrer par le calcul la conjecture précédente.

Exercice 6

On dispose d'un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ , avec λ inconnu.

On cherche à estimer la probabilité $e^{-q\lambda}$ de n'observer que des 0 au cours de q expériences consécutives.

On pose $T_n = e^{-q\bar{X}_n}$.

1. T_n est-il un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$?
2. Montrer que T_n est un estimateur convergent de $e^{-q\lambda}$.

Exercice 7

Estimation par capture-recapture

On cherche à évaluer le nombre N de poissons présents dans un étang.

Pour cela, on prélève un échantillon de m poissons, que l'on marque puis que l'on rejette dans l'étang.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, où $n \leq m$. On prélève successivement des poissons au hasard et avec remise dans l'étang. On note X_n la v.a.r. égale au nombre de poissons qu'il a été nécessaire de pêcher avant d'obtenir n poissons marqués. On note $D_i = X_i - X_{i-1}$ où $i > 1$ et $D_1 = X_1$. On admet que les v.a.r. D_i sont indépendantes. On note $Z_k = m.D_k$.

- (a) Quelle est la loi de D_i , où $i \geq 1$? à justifier rapidement !!!
Donner son espérance, sa variance.
- (b) En déduire l'espérance et la variance de la v.a.r. X_n .
- Montrer que $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n Z_k)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est un estimateur sans biais convergent de N .

- (a) Justifier que la suite $(\frac{\sqrt{N(N-m)}}{\sqrt{Z_n(Z_n-m)}})$ converge en probabilité vers 1.
- (b) On admet le lemme de Slutsky : si (X_n) et (Y_n) sont deux suites de variables aléatoires telles que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **en loi** vers X , et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **en probabilité** vers une variable aléatoire certaine égale à c , alors la suite $(X_n Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire cX .

Prouver alors que la suite $(\sqrt{n} \times \frac{\overline{Z}_n - N}{\sqrt{Z_n(Z_n-m)}})$ converge en loi vers une variable V suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Rappel : si $\alpha \in]0, 1[$, il existe un unique réel $t_\alpha > 0$ tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
Prouver que

$$[\overline{Z}_n - t_\alpha \sqrt{\frac{Z_n(\overline{Z}_n - m)}{n}}; \overline{Z}_n + t_\alpha \sqrt{\frac{Z_n(\overline{Z}_n - m)}{n}}]$$

est un intervalle de confiance asymptotique de N au risque α .

Exercice 8

On suppose que la probabilité qu'un individu contagieux transmette son virus à un individu sain est inconnue et on le note $p \in]0, 1[$.

On cherche donc à estimer cette probabilité.

On considère la variable de Bernoulli Y qui vaut 1 si l'individu contagieux transmet son virus et 0 sinon.

Pour tout entier naturel m supérieur ou égal à 1, on considère un m -échantillon (Y_1, Y_2, \dots, Y_m) de variables aléatoires i.i.d. de même loi que Y .

On note $\overline{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k$.

- Montrer que \overline{Y}_m est un estimateur sans biais et convergent de p .
- Montrer que $p(1-p) \in]0, \frac{1}{4}]$.
- A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\left[\overline{Y}_m - \sqrt{\frac{5}{m}}, \overline{Y}_m + \sqrt{\frac{5}{m}} \right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95

Exercice 9

Loi de Pareto et estimateur du maximum de vraisemblance (classique)

- Pour $a > 0$, montrer que la fonction :

$$f_a : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

est une densité de probabilité (**loi de Pareto**).

- Soit $a > 0$ et X une variable de densité f_a . A quelle condition X admet-elle une espérance ?
Si X admet une espérance, calculez $E(X)$.

Dans la suite de cet exercice, on considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) i.i.d. de loi à densité f_a , où $a > 0$ est un paramètre **inconnu**.

- On définit la **fonction de vraisemblance** :

$$L : (x_1, \dots, x_n, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \mapsto L(x_1, \dots, x_n, a) = \prod_{k=1}^n f_a(x_k)$$

- Expliciter, pour $(x_1, \dots, x_n, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, la valeur de $L(x_1, \dots, x_n, a)$.
- Pour $(x_1, \dots, x_n) \in]1, +\infty[^n$ donné, étudier les variations de la fonction $h : a \mapsto L(x_1, \dots, x_n, a)$ et montrer qu'elle atteint un maximum en un point \hat{a} .

Puisque \hat{a} dépend de x_1, \dots, x_n , il existe une fonction $\varphi :]1, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\hat{a} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

On considère alors la variable aléatoire $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ appelée **estimateur du maximum de vraisemblance** de a .

- (a) Pour $k \in [[1, n]]$, montrer que la variable aléatoire $Y_k = \ln(X_k)$ suit une loi exponentielle dont vous préciserez le paramètre.
- En déduire la loi de la variable $a.(Y_1 + \dots + Y_n)$, puis une densité de $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.
- Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$ (on pourra réutiliser les résultats de l'exercice 2 !!!).
- En déduire que T_n est un estimateur convergent de a .

Exercice 10

Oral ESCP

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dispose de n variables aléatoires indépendantes, notées X_1, X_2, \dots, X_n suivant la même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta > 0$) et définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On souhaite estimer $\exp(-\theta)$ (probabilité d'obtenir 0).

On définit, pour tout i élément de $[[1, n]]$, la variable aléatoire Y_i par :

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

On note $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

- (a) Donner la loi de Y_i pour tout i élément de $[[1, n]]$.
- En déduire que \bar{Y}_n est un estimateur sans biais et convergent de $\exp(-\theta)$.

- Pour tout $k \in [[1, n]]$ on note $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

- Rappeler la loi de S_k pour tout k élément de $[[1, n]]$.

- On note, pour tout entier naturel j , $\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0)$

- Montrer que pour tout entier naturel j , on a $\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j$

On définit l'estimateur $W_n = \varphi(S_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$

- Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $\varphi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.
- Calculer $V(W_n)$, puis montrer que W_n est un estimateur convergent de $e^{-\theta}$.

- On souhaite ici comparer les performances des estimateurs \bar{Y}_n et $\varphi(S_n)$

- Justifier que la fonction exponentielle est convexe puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leq \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$$

- Montrer l'inégalité $V(\varphi(S_n)) \leq V(\bar{Y}_n)$.

- Conclure