
Concours Blanc n°2 - sujet type Edhec (DS6) -

23/02/2026

Consignes : Vous devez numéroté les pages et encadrer à la règle vos résultats.

Exercice 1

On note f la fonction définie sur $] -\infty, 1[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ et $S_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

(a) Montrer que $\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.

(b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n .

(c) Ecrire en **Python** une fonction intitulée **def S(n)** : prenant pour paramètre un entier n et renvoyant la valeur de S_n .

2. (a) Justifier que f est continue en 0.

(b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

3. (a) Etudier le signe de $g : x \mapsto x + \ln(1-x)$ sur $] -\infty, 1[$.

(b) Justifier que f est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$.
Préciser $f'(x)$ pour $x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$.

(c) Donner le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes.

4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! u_n \in [0, 1[, f(u_n) = n$ et préciser la valeur de u_1 .

(b) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement monotone et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(c) Calculer $f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

(d) Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{-n \ln(1-u_n)} \geq \frac{2}{3} \times \frac{1}{n \ln(n)}$.

Préciser la nature de la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1-u_n)}$.

(e) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 2

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. On considère $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Soient a et b deux vecteurs fixés de E de norme 1 et orthogonaux, on note $F = \text{Vect}(a, b)$

On note φ l'application définie sur E par : $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle x, a \rangle \cdot b - \langle x, b \rangle \cdot a$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E puis calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$
2. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) = F^\perp$
3. Déterminer le rang de φ et expliciter une base orthonormale de $\text{Im}(\varphi)$.
4. Montrer que : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.
5. (a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible pour φ .
(b) Déterminer le spectre de φ . φ est-il diagonalisable ?
6. (a) Montrer que $\varphi \circ \varphi$ est diagonalisable.
(b) Prouver que $\text{Ker}(\varphi \circ \varphi) = \text{Ker}(\varphi)$.
(c) Calculer $\varphi^2(a)$ et $\varphi^2(b)$. En déduire le spectre de $\varphi \circ \varphi$ et ses sous-espaces propres.
7. **Cas particulier** : on suppose que $n = 3$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$
 - (a) Montrer que a et b vérifient les conditions de l'énoncé.
 - (b) Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
 - (c) Ecrire la matrice M de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Ecrire les matrices dans la base canonique des projections orthogonales sur F et $F^\perp$.
 - (e) Justifier que $\varphi \circ \varphi = -p_F$ et expliciter une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $M^2 = PD^tP$.

Problème: propriétés de la loi de Poisson, médiane

Les Parties 1 et 2 sont largement indépendantes.

Partie 1 : quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

1. On pose pour tout réel $x > 0$, $J_0(x) = 1 - e^{-x}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$:

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

- (a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.
- (b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} x^n e^{-x}$$

(c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

(d) Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2. (a) Rappeler, sans démonstration mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de la variable aléatoire S_n .

(b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P([S_n \leq n])$ et $P([S_n \geq n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h_n(x) = x^n e^{-x}$.

(a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt$$

(c) En déduire que la suite $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(d) En procédant de façon similaire, étudier la monotonie de la suite $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(e) Montrer que les deux suites $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

4. (a) Énoncer le Théorème Central Limite et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_n \leq n])$

On admet le résultat suivant, qui donne un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$ (formule de Stirling) :

$$n! \sim_{n \rightarrow +\infty} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi}$$

(b) Donner un équivalent et la limite de $P([S_n = n])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_n \geq n])$.

Partie 2 : médiane de variables discrètes et à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F . On appelle médiane de X , tout réel m vérifiant les deux conditions: $P([X \leq m]) \geq \frac{1}{2}$ et $P([X \geq m]) \geq \frac{1}{2}$.

On admet qu'un tel réel m existe toujours.

1. Questions Python :

Étant donné une matrice ligne $L = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ où $p_1, \dots, p_n$ sont des nombres réels, on rappelle que L définit une loi de probabilité s'il existe une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [[1, n]]$ et pour tout $i \in [[1, n]]$, $P(X = i) = p_i$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice ligne $L = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ où $p_1, \dots, p_n$ sont des nombres réels. Ecrire une fonction Python, intitulée `def EstceuneLoi(L)` : de paramètre une matrice ligne L , qui renvoie `True` si L correspond à une loi de probabilité et `False` sinon.
- (b) Ecrire une fonction intitulée `def Median(L)` telle que:
 - si L ne correspond pas à une loi de probabilité, la fonction renvoie le texte "Pas une loi"
 - si L correspond à une loi de probabilité, et si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [[1, n]]$ et pour tout $i \in [[1, n]]$, $P(X = i) = p_i$, alors le programme renvoie une médiane de X .

2. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

- (a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P([X = k])$$

- (b) Montrer que : $\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P([X = k])$.

En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E(|X - r|) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (F(k) - \frac{1}{2})$

- (c) Soit m une médiane de X . On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E(|X - r|) - E(|X - m|)$. Conclure.
- (d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$). En utilisant les questions 3. et 4. de la Partie I., justifier que n est une médiane de X .

3. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = E(|X - x|)$.

- (a) Établir pour tout $x \geq 0$ l'encadrement $0 \leq x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} t f(t) dt$
En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$.
En considérant la variable aléatoire $-X$. montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0$.
- (b) Établir pour tout x réel, la relation : $M(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt + \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt$
- (c) Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M(b) - M(a) = \int_a^b (2F(t) - 1) dt$.
- (d) On note m une médiane de X . Montrer que m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.