

Corrigé du CB2 - sujet type Edhec (DS6)

Exercice 1 : Edhec 2018 (sujet 1)

On note f la fonction définie sur $] -\infty, 1[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ et $S_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

- (a) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ est dérivable sur $[2; +\infty[$ et pour tout $t \geq 2$,

$$g'(t) = -\frac{\ln(t) + 1}{t^2 (\ln(t))^2} \leq 0$$

donc g est décroissante sur $[2; +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Alors pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

d'où en intégrant,

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

- (b) Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. En sommant la relation précédente, on obtient facilement

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \ln(k)}$$

Comme

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_2^{N+1} \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

par entraînement on obtient $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$.

Bilan : la série de terme général a_n est divergente

- (c) def S(n) :

```
T=0
for k in range(2,n+1):
    T=T+1/(k*np.log(k))
return T
```

2. (a) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$, par équivalent classique $\ln(1-x) \sim_{x \rightarrow 0} -x$, donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} \rightarrow_{x \rightarrow 0} 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$: f est continue en 0

- (b) Pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= -\frac{1}{x} \left(\frac{x}{(1-x)\ln(1-x)} + 1 \right) \\ &= -\frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant le DL en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u) : \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on obtient que

$$\begin{aligned} -(x + (1-x)\ln(1-x)) &= -(x + (1-x)(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))) \\ &= -x + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$x(1-x) \cdot \ln(1-x) \sim_{x \rightarrow 0} -x^2$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{-x^2} = \frac{1}{2}$$

Bilan : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

3. (a) On considère $g : x \mapsto x + \ln(1-x)$ définie sur $] -\infty, 1[$.

La fonction g est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et pour tout $x \in] -\infty, 1[$,

$$g'(x) = 1 + \frac{-1}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$$

Comme $1-x \geq 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$. Donc g est croissante sur $] -\infty, 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus $g(0) = 0$. Finalement g est négative sur $] -\infty, 1[$

- (b) f est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ par produit et quotient de fonctions dérivables. Pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x \cdot [-\ln(1-x) + (1-x) \cdot \frac{-1}{1-x}]}{(1-x)^2 \cdot \ln(1-x)^2} \\ &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x \cdot [-\ln(1-x) - 1]}{(1-x)^2 \cdot \ln(1-x)^2} \\ &= -\frac{x + \ln(1-x)}{(1-x)^2 \cdot \ln(1-x)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent $f'(x)$ est du signe de $-g(x)$, donc positive sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$.

- (c) On en déduit que la fonction f est croissante sur $] -\infty, 1[$.

$$f(x) \sim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(1-x)} \rightarrow_{x \rightarrow -\infty} 0$$

En 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln(u) = 0^-$ par CC donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. D'où le tableau de variations:

t	$-\infty$	0	1
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	

4. (a) La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0, 1[$. D'après le théorème de la bijection, elle est bijective de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[) = [1; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n \in [1; +\infty[$, il existe un unique $u_n \in [0, 1[$ tel que $f(u_n) = n$. Comme $f(0) = 1$, il est clair que l'on a $u_1 = 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(u_n) = n < n + 1 = f(u_{n+1})$. Comme f est strictement croissante on a nécessairement $u_n < u_{n+1}$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Par ailleurs,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{-1}(f_n(u_n)) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f_n^{-1}(X) = 1$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{-(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}})}{\frac{1}{n\sqrt{n} \ln(\frac{1}{n\sqrt{n}})}} = \dots = \frac{n\sqrt{n} - 1}{\ln(n\sqrt{n})}$$

On a alors

$$\frac{f(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}})}{n} = \frac{\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{\ln(n\sqrt{n})} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{3}{2} \ln(n)} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}})}{n} \geq 1 &\Leftrightarrow f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \geq n \\ &\Leftrightarrow f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \geq f(u_n) \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \geq u_n \text{ par stricte croissance de } f \end{aligned}$$

Bilan : il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

(d) Pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} -u_n \geq -1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} &\Rightarrow 1 - u_n \geq \frac{1}{n\sqrt{n}} \\ &\Rightarrow \ln(1 - u_n) \geq \ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -\ln(n\sqrt{n}) = -\frac{3}{2} \ln(n) \\ &\Rightarrow -n \ln(1 - u_n) \leq \frac{3}{2} n \ln(n) \\ &\Rightarrow \frac{1}{-n \ln(1 - u_n)} \geq \frac{2}{3} \times \frac{1}{n \ln(n)} \end{aligned}$$

D'après le 1.b), la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente. Par critère de minoration,

la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1 - u_n)}$ est divergente

(e) Comme $f(u_n) = n$, on a alors

$$-\frac{u_n}{(1 - u_n) \ln(1 - u_n)} = n \Leftrightarrow 1 - u_n = u_n \times \left(-\frac{1}{n \ln(1 - u_n)}\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, on en déduit que $1 - u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n \ln(1 - u_n)}$. Par critère d'équivalence (séries à termes positifs), la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Bilan : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, et la série de terme général $1 - u_n$ est divergente

La suite (u_n) tend vers 1 mais "pas très vite"...

Exercice 2

1. Comme a et b sont deux vecteurs de E , pour tout $x \in E$ $\varphi(x) \in E$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y) &= \langle \lambda x + y, a \rangle \cdot b - \langle \lambda x + y, b \rangle \cdot a \\ &= \lambda \langle x, a \rangle \cdot b + \langle y, a \rangle \cdot b - \lambda \langle x, b \rangle \cdot a - \langle y, b \rangle \cdot a \\ &= \lambda \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

Bilan : φ est un endomorphisme de E .

$$\varphi(a) = \langle a, a \rangle \cdot b - \langle a, b \rangle \cdot a = \|a\|^2 \cdot b + 0 = b$$

$$\varphi(b) = \langle b, a \rangle \cdot b - \langle b, b \rangle \cdot a = \|b\|^2 \cdot a - a$$

car a et b sont normés et orthogonaux.

2. Comme la famille (a, b) est orthonormée, il s'agit d'une famille libre. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \langle x, a \rangle \cdot b - \langle x, b \rangle \cdot a = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, a \rangle = 0 \text{ et } \langle x, b \rangle = 0 \text{ car } (a, b) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(a, b)^\perp \end{aligned}$$

Bilan : $\text{Ker}(\varphi) = F^\perp$

3. Comme $\dim(F) = 2$ (car la famille (a, b) est une base de F : génératrice et libre), on a $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(F^\perp) = n - 2$ d'où par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$. D'autre part, $a = -\varphi(b)$ et $b = \varphi(a)$ donc a et b appartiennent à $\text{Im}(\varphi)$. La famille (a, b) est une famille libre de $\text{Im}(\varphi)$, de cardinal 2 avec $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$: il s'agit donc d'une base de $\text{Im}(\varphi)$. De plus on sait déjà que cette famille est orthonormée.

Bilan : $\text{rg}(\varphi) = 2$ et (a, b) est une BON de $\text{Im}(\varphi)$.

4. $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x), y \rangle &= \langle \langle x, a \rangle \cdot b - \langle x, b \rangle \cdot a, y \rangle \\ &= \langle x, a \rangle \cdot \langle b, y \rangle - \langle x, b \rangle \cdot \langle a, y \rangle \text{ par linéarité à gauche du produit scalaire} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle x, \varphi(y) \rangle &= \langle x, \langle y, a \rangle \cdot b - \langle y, b \rangle \cdot a \rangle \\ &= \langle y, a \rangle \cdot \langle x, b \rangle - \langle y, b \rangle \cdot \langle x, a \rangle \text{ par linéarité à droite du produit scalaire} \end{aligned}$$

Bilan : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$

On reconnaît donc un endomorphisme antisymétrique... HP mais on a déjà étudié les propriétés suivantes !!

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de φ et $x \in E$ un vecteur propre associé : $\varphi(x) = \lambda.x$ avec $x \neq 0_E$. Alors d'après la question précédente,

$$\langle \varphi(x), x \rangle = -\langle x, \varphi(x) \rangle \Leftrightarrow \lambda \cdot \|x\|^2 = -\lambda \cdot \|x\|^2 \Leftrightarrow \lambda = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$$

car $\|x\| > 0$ puisque $x \neq 0_E$.

Donc 0 est la seule valeur propre possible pour φ .

- (b) Par ailleurs comme $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - 2 \geq 1$ (car $n \geq 3$), $0 \in \text{Sp}(\varphi)$.

Bilan : $\boxed{\text{Sp}(\varphi) = \{0\}}$

Comme φ possède pour unique valeur propre 0, φ est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim \text{Ker}(\varphi - \lambda.Id) = n \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n$$

ce qui est faux puisque $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - 2$. Donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas diagonalisable}}$

5. (a) Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle \varphi^2(x), y \rangle = -\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, \varphi^2(y) \rangle$$

L'application $\boxed{\varphi^2 \text{ est symétrique donc diagonalisable}}$

- (b) Montrons que $\text{Ker}(\varphi \circ \varphi) = \text{Ker}(\varphi)$.

- Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(x) = 0$ donc $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(0) = 0$. D'où $x \in \text{Ker}(\varphi \circ \varphi)$.
- Soit $x \in \text{Ker}(\varphi \circ \varphi)$. Alors $\varphi(\varphi(x)) = 0$. Ainsi $\varphi(x) \in \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(a, b)^\perp$. Mais comme $\varphi(x) \in \text{Im}(\varphi)$, on a aussi $\varphi(x) \in \text{Vect}(a, b)$. Donc $\varphi(x) \in F \cap F^\perp = 0$ et $\varphi(x) = 0$. D'où $x \in \text{Ker}(\varphi)$.

- Bilan : $\boxed{\text{Ker}(\varphi \circ \varphi) = \text{Ker}(\varphi)}$

- (c) $\varphi^2(a) = \varphi(b) = -a$ et $\varphi^2(b) = \varphi(-a) = -b$. Par conséquent $\text{Vect}(a, b) \subset \text{Ker}(\varphi + Id)$, donc $\dim(\text{Ker}(\varphi + Id)) \geq 2$. Comme on sait déjà que $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - 2$ et $\dim(\text{Ker}(\varphi + Id) + \dim(\text{Ker}(\varphi)) \leq n$, on a $\dim(\text{Ker}(\varphi + Id)) = 2$.

Bilan : $\boxed{\text{Sp}(\varphi^2) = \{-1, 0, \}, \text{Ker}(\varphi^2) = \text{Ker}(\varphi) = F^\perp \text{ et } \text{Ker}(\varphi + Id) = F}$

6. **Cas particulier :** on suppose que $n = 3$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

- (a) $\langle a, b \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 - 1) = 0$, $\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 1)} = 1$ et $\|b\| = \sqrt{\frac{1}{3}(1 + 1 + 1)} = 1$. Donc a et b vérifient les conditions de l'énoncé.

- (b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in F^\perp &\Leftrightarrow \langle u, a \rangle = 0 \text{ et } \langle u, b \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ et } x + y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ et } z = -2x \\ &\Leftrightarrow u = (x, x, -2x) \end{aligned}$$

Donc $F^\perp = \text{Vect}((1, 1, -2))$.

Comme $\|(1, 1, -2)\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$, on en déduit que la famille (c) est une BON de $F^\perp$, où $c = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$.

- (c)

$$\varphi((1, 0, 0)) = \frac{1}{\sqrt{2}}.b - \frac{1}{\sqrt{3}}.a = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 2, 1)$$

$$\varphi((0, 1, 0)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.b - \frac{1}{\sqrt{3}}.a = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 0, -1)$$

$$\varphi((0, 0, 1)) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}}.a = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 0)$$

D'où

$$M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que cette matrice est antisymétrique : cf ex. de TD...

- (d) La matrice de $p_{F^\perp}$ est plus facile à écrire.

$$p_{F^\perp}(e_1) = \langle e_1, c \rangle .c = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} .(1, 1, -2) = \frac{1}{6}(1, 1, -2)$$

$$p_{F^\perp}(e_2) = \langle e_2, c \rangle .c = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} .(1, 1, -2) = \frac{1}{6}(1, 1, -2)$$

$$p_{F^\perp}(e_3) = \langle e_3, c \rangle .c = -\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} .(1, 1, -2) = \frac{1}{6}(-2, -2, 4)$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Puis comme $p_F = Id - p_{F^\perp}$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (e) Travaillons matriciellement !

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi \circ \varphi) &= M^2 \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) \end{aligned}$$

Donc on a bien $\varphi \circ \varphi = -p_F$.

On considère la BON (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$. On a alors $p_F(a) = a$, $p_F(b) = b$ et $p_F(c) = 0$, donc $\varphi^2(a) = -a$, $\varphi^2(b) = -b$, $\varphi^2(c) = 0$. D'où en posant $D = \text{Diag}(-1, -1, 0)$ et

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, on a bien une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $M^2 = PD^tP$.

Problème: propriétés de la loi de Poisson, médiane

Partie 1 : quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

1. On pose pour tout réel $x > 0$, $J_0(x) = 1 - e^{-x}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$:

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

- (a) Pour tout $x > 0$,

$$J_1(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$$

Par intégration par parties, on obtient sans difficulté :

$$J_1(x) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

- (b) On part de $J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$. Posons

$$\begin{cases} u(t) = \frac{t^n}{n!} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. Par IPP, on obtient alors :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \left[\frac{t^n}{n!} \cdot (-e^{-t}) \right]_0^x + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} \cdot e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot e^{-x} + J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

- (c) En raisonnant par descente, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= -\frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot e^{-x} + J_{n-1}(x) \\ &= -\frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot e^{-x} - \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} + J_{n-2}(x) \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot e^{-x} - \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - \dots - x \cdot e^{-x} + J_0(x) \\ &= -e^{-x} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + 1 - e^{-x} \\ &= 1 - e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Comme pour tout $k \in [[0, n]]$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cdot \frac{x^k}{k!} = 0$ (par croissances comparées), on trouve par somme que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x) = 1$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!}.$$

Remarque : nous avons plus ou moins refait le cours sur la fonction Γ !

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2. (a) Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. Par stabilité pour la somme de la loi de Poisson, on en déduit que $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)}$
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-n} = 1 - J_n(n)$$

Par ailleurs,

$$P(S_n \geq n) = 1 - P(S_n \leq n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-n} = J_{n-1}(n)$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h_n(x) = x^n e^{-x}$.

- (a) La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ par produit de fonctions classiques. Pour tout $x \geq 0$,

$$h'_n(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x} = x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot (n - x)$$

donc $h'_n(x)$ est du signe de $n - x$. D'où le tableau de variations :

t	0	n	$+\infty$
$h'_n(t)$		+	-
$h_n(t)$	0	$n^n \cdot e^{-n}$	0

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} &P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) \\ &= 1 - J_{n+1}(n+1) - (1 - J_n(n)) \\ &= J_n(n) - J_{n+1}(n+1) \\ &= J_n(n) - J_{n+1}(n) + J_{n+1}(n) - J_{n+1}(n+1) \\ &= e^{-n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^n t^{n+1} \cdot e^{-t} dt - \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^{n+1} t^{n+1} \cdot e^{-t} dt \\ &= e^{-n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_n^{n+1} t^{n+1} \cdot e^{-t} dt \quad (\text{par la relation de Chasles}) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(-\int_n^{n+1} e^{-n} \cdot n^{n+1} dt + \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(-\int_n^{n+1} h_{n+1}(n) dt + \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt \end{aligned}$$

- (c) Comme la fonction h_{n+1} est croissante sur $[n, n+1]$, pour tout $t \in [n, n+1]$, $h_{n+1}(t) \geq h_{n+1}(n)$. On en déduit que $\int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt \geq 0$ et enfin que $P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) \leq 0$.

Bilan : la suite $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

- (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(S_n \geq n) - P(S_{n+1} \geq n+1) &= J_{n-1}(n) - J_n(n+1) \\ &= J_{n-1}(n) - J_n(n) + J_n(n) - J_n(n+1) \\ &= \frac{n^n}{n!} \cdot e^{-n} + \int_0^n \frac{t^n}{n!} \cdot e^{-t} dt - \int_0^{n+1} \frac{t^n}{n!} \cdot e^{-t} dt \\ &= \frac{n^n}{n!} \cdot e^{-n} - \int_n^{n+1} \frac{t^n}{n!} \cdot e^{-t} dt \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= - \int_n^{n+1} h_n(t) - h_n(n) dt \end{aligned}$$

Comme la fonction h_n est décroissante sur $[n, n+1]$, on en déduit que $\int_n^{n+1} h_n(t) - h_n(n) dt \geq 0$ et enfin que $P(S_n \geq n) - P(S_{n+1} \geq n+1) \leq 0$.

Bilan : la suite $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

- (e) Etant toutes deux décroissantes et minorées par 0, les deux suites $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

4. (a) Les variables $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont :

- mutuellement indépendantes
- de même loi de Poisson de paramètre 1, de même espérance 1 et variance 1.

Notons $\overline{X_n} = \frac{1}{n} S_n$ et

$$\overline{X_n}^* = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - 1}{1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (S_n - n)$$

Alors par le T.C.L.,

$$\overline{X_n}^* \xrightarrow{\mathcal{L}} N \quad \text{où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Alors :

$$\begin{aligned} P(S_n \leq n) &= P(S_n - n \leq 0) \\ &= P(\overline{X_n}^* \leq 0) \quad \text{en divisant par } \sqrt{n} > 0 \\ \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} P(N \leq 0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bilan : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_n \leq n]) = \frac{1}{2}$

On admet le résultat suivant, qui donne un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$ (formule de Stirling) :

$$n! \sim_{n \rightarrow +\infty} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi}$$

- (b)

$$P(S_n = n) = e^{-n} \cdot \frac{n^n}{n!} \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \cdot n^n \cdot \frac{1}{n^{n+1/2}} \cdot e^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot n \cdot \pi}}$$

- (c)

$$\begin{aligned} P(S_n \geq n) &= 1 - P(S_n < n) \\ &= 1 - (P(S_n \leq n) - P(S_n = n)) \\ &= 1 - P(S_n \leq n) + P(S_n = n) \\ \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} &1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie 2 : médiane de variables discrètes et à densité

9. Questions Python :

```
(a) def EstceuneLoi(L):
    T=False
    if np.sum(L<0)==0 and np.sum(L)==1:
        T=True
    return T

(b) def Mediane(L):
    if EstceuneLoi(L)==False:
        return "Pas une loi"
    else:
        k=0
        f=L[0,0]
        while f<1/2:
            k=k+1
            f=f+L[0,k]
        return k+1 #décalage Python !
```

10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

- (a) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème de transfert on a sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} E(|X - r|) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |k - r| \cdot P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) \cdot P(X = k) + \sum_{k=r}^{+\infty} (k - r) \cdot P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) \cdot P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} (k - r) \cdot P(X = k) - \sum_{k=0}^{r-1} (k - r) \cdot P(X = k) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) \cdot P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X = k) - r \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) \\ &\quad \text{comme } X \text{ admet une espérance, ces séries sont bien convergentes} \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) \cdot P(X = k) + E(X) - r \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r-1} F(k) &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^k P(X=i) = \sum_{0 \leq i \leq k \leq r-1} P(X=i) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=i}^{r-1} P(X=i) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) \cdot P(X=i) = \sum_{k=0}^{r-1} (r-k) P([X=k]) \quad (\text{indice muet})\end{aligned}$$

On en déduit à l'aide de la question précédente que : pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$E(|X-r|) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{r-1} F(k) + E(X) - r = E(X) + 2 \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (F(k) - \frac{1}{2})$$

(c) Soit m une médiane de X . On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.

Déterminons, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E(|X-r|) - E(|X-m|)$. Tout d'abord, d'après la question précédente,

$$E(|X-r|) - E(|X-m|) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (F(k) - \frac{1}{2}) - 2 \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (F(k) - \frac{1}{2})$$

- Si $r = m$, de façon évidente cette différence vaut 0.
- Si $r > m$, alors

$$E(|X-r|) - E(|X-m|) = 2 \cdot \sum_{k=m}^{r-1} (F(k) - \frac{1}{2}) \geq 0$$

puisque si $k \geq m$, on a $F(k) \geq \frac{1}{2}$.

- si $r < m$ alors

$$E(|X-r|) - E(|X-m|) = -2 \cdot \sum_{k=r}^{m-1} (F(k) - \frac{1}{2}) \geq 0$$

puisque si $k \leq m$ alors $F(k) \leq \frac{1}{2}$.

Bilan : la médiane m est la valeur entière qui minimise la quantité $E(|X-r|)$ pour $r \in \mathbb{N}$

(d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On sait que la suite $(P(S_n \geq n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, de limite $\frac{1}{2}$. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(S_n \geq n) \geq \frac{1}{2}$.

De même la suite $(P(S_n \leq n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, de limite $\frac{1}{2}$. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(S_n \leq n) \geq \frac{1}{2}$.

On en déduit bien que n est une médiane de X .

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = E(|X-x|)$.

(a) Tout d'abord, une fonction de répartition est toujours majorée par 1, donc pour tout $x \geq 0$,

$$x \cdot (1 - F(x)) \geq 0$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}x \cdot (1 - F(x)) &= x \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \int_{-\infty}^x f(t) dt \right) \\ &= x \cdot \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} t \cdot f(t) dt\end{aligned}$$

Enfin, comme X admet une espérance, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) dt$ est convergente, donc son reste $\int_x^{+\infty} t \cdot f(t) dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (1 - F(x)) = 0$

On considère la variable aléatoire $Y = -X$. On remarque que le résultat précédent appliqué à Y donne :

$$x \cdot (1 - F_Y(x)) = x \cdot (1 - P(-X \leq x)) = x \cdot P(-X > x) = -(-x) \cdot P(X < -x) = -(-x) \cdot P(X \leq -x)$$

car X est à densité. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) \cdot P(X \leq -x) = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot F(x) = 0$.

(b) Pour tout réel x , d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}M(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| \cdot f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^x (x-t) \cdot f(t) dt + \int_x^{+\infty} (t-x) \cdot f(t) dt\end{aligned}$$

Soit $A < x$ et $I_A = \int_A^x (x-t) \cdot f(t) dt$. On obtient par IPP que

$$I_A = [(x-t) \cdot F(t)]_A^x + \int_A^x F(t) dt = (x-A) \cdot F(A) + \int_A^x F(t) dt$$

Comme $\lim_{A \rightarrow -\infty} F(A) = 0$ et $\lim_{A \rightarrow -\infty} A \cdot F(A) = 0$ d'après la question précédente, on trouve en passant à la limite quand $A \rightarrow -\infty$ que

$$\int_{-\infty}^x (x-t) \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^x F(t) dt$$

Soit $B > x$ et $J_B = \int_x^B (t-x) \cdot f(t) dt$. On obtient aussi par IPP que :

$$J_B = [(t-x) \cdot (1-F(t))]_x^B + \int_x^B (1-F(t)) dt = (B-x) \cdot (1-F(B)) + \int_x^B (1-F(t)) dt$$

Comme $\lim_{B \rightarrow +\infty} 1 - F(B) = 0$ et $\lim_{B \rightarrow +\infty} B \cdot (1 - F(B)) = 0$ d'après la question précédente, on trouve par passage à la limite lorsque B tend vers $+\infty$ que :

$$\int_x^{+\infty} (t-x) \cdot f(t) dt = \int_x^{+\infty} (1-F(t)) dt$$

Bilan : $M(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt + \int_x^{+\infty} (1-F(t)) dt$

(c) Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a d'après la question précédente et la relation de Chasles,

$$M(b) - M(a) = \int_a^b F(t) dt - \int_a^b (1-F(t)) dt = \int_a^b (2F(t) - 1) dt$$

(d) On note m une médiane de X . Pour tout réel b , on a alors

$$M(b) - M(m) = \int_m^b (2F(t) - 1) dt$$

Si $b \geq m$, comme pour tout $t \geq m$ on a $F(t) \geq \frac{1}{2}$, on en déduit que $M(b) - M(m) \geq 0$.
Si $b < m$, comme pour tout $t \leq m$ on a $F(t) \leq \frac{1}{2}$ on en déduit que $(2F(t) - 1) \leq 0$,
puis les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre décroissant, on obtient encore que $M(b) - M(m) \geq 0$.

Bilan : pour tout $b \in \mathbb{R}$, $M(b) \geq M(m)$.

Le point m est donc un point en lequel la fonction M atteint son minimum
--