
CB2 - sujet facultatif type HEC

Interpolation polynômiale et phénomène de Runge

Dans tout le problème :

• $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

• On identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ et la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$
(par convention : $0^0 = 1$).

• On rappelle la formule de Stirling : $n!$ est équivalent à $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Le problème a pour objet l'approximation d'une fonction réelle par des fonctions polynomiales.

Dans la partie I, on étudie le cas des polynômes de Bernstein.

Les parties II et III sont consacrées aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $A_k = X^k$, et on note $C_n = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit T_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(T_n(P))(X) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X)$.

1. *Dans cette question uniquement, on choisit $n = 2$.*

- (a) Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base C_2 .
- (b) En déduire que la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (c) Calculer $T_2(A_0)$, $T_2(A_1)$ et $T_2(A_2)$, et déterminer la matrice H_2 de T_2 dans la base C_2 . Préciser les valeurs propres et les sous espaces propres de T_2 .

2. *On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1*

- (a) Montrer que la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre, en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) Montrer que l'application T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.
- (d) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le degré du polynôme $T_n(A_k)$ est égal à k .
Pour établir ce résultat, on pourra utiliser sans la démontrer la propriété suivante :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (T_n(A_{k+1}))(X) = \frac{1}{n} X(1-X) (T_n(A_k))'(X) + X(T_n(A_k))(X).$$

où $(T_n(A_k))'$ désigne le polynôme dérivé de $(T_n(A_k))$.

- (e) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note α_k le coefficient de X^k du polynôme $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et de n .
L'automorphisme T_n est-il diagonalisable ?

3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in [0, 1], f_n(z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(z)$$

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $z \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit Z_n une variable aléatoire définie sur cet espace, et suivant la loi binomiale de paramètres n et z . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{Z}_n = \frac{Z_n}{n}$.

- (a) Montrer que la suite de variables aléatoires $(\bar{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers le réel z .
(b) Justifier l'existence de $M = \max_{[0,1]} |f|$.
(c) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose U_n l'événement :

$$U_n = [|f(\bar{Z}_n) - f(z)| > \varepsilon]$$

On note $\mathbb{1}_{U_n}$ la variable indicatrice de l'événement U_n .

Etablir l'inégalité : $|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \leq 2M \times \mathbb{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbb{1}_{\bar{U}_n}$.

- (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(\bar{Z}_n)) = f(z)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = f(z)$.

4. (a) On suppose que l'on a importé `import numpy.random as rd`
Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie une simulation de la loi binomiale de paramètres n et z :

```
def binom(n,z):
    Z=.....
    return Z
```

- (b) Soit une fonction Python `f` et une variable `z` définies par :

```
def f(x):
    if x==0 :
        y=0
    else :
        y=-x*np.log(x)
    return y
z=0.4
```

On considère le code Python suivant :

```
n=100
N=1000
S=0
for k in range(1,N+1):
    S=S+f(binom(n,z)/n)
print(S/N)
```

Ce code affiche une valeur approchée d'une certaine quantité, laquelle ?

Cette valeur approchée est le résultat de la mise en oeuvre de certaines méthodes, lesquelles ?

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels tous distincts. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$$

(a) Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec :

$$e_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots \text{et } e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_i$.

$$\text{Montrer que pour tout } i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ on a : } L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

(c) Soit Ψ l'application définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \quad \Psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(x_k) Q(x_k)$$

Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit alors $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.

Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

(d) Expliciter la matrice de passage A de la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_f , vérifiant les relations :

$$P_f(x_0) = f(x_0), \quad P_f(x_1) = f(x_1), \dots, \quad P_f(x_n) = f(x_n).$$

On dit que P_f est le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Exprimer P_f dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.

6. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels appartenant à un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, tels que :

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b. \text{ On pose } w(X) = \prod_{k=0}^n (X - x_k).$$

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et $\bar{x}$ un réel de $[a, b]$ différent de $x_0, x_1, \dots, x_n$. On note P_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ et Q_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$.

(a) Etablir l'existence d'un réel δ tel que pour tout $t \in [a, b]$, on a : $Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t)$.

(b) Soit h la fonction définie sur $[a, b]$ par : $\forall t \in [a, b], \quad h(t) = f(t) - Q_f(t)$.

Montrer que la fonction h s'annule en les $(n+2)$ points $\bar{x}, x_0, x_1, \dots, x_n$.

En déduire l'existence d'un réel θ de $]a, b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.

(c) Etablir l'égalité : $f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\bar{x})$.

(d) En déduire que pour tout $t \in [a, b]$, on a :

$$|f(t) - P_f(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge.

Dans cette partie, on suppose que l'entier n appartient à $\mathbb{N}^*$ et n'est plus fixé.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose : $x_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n}$.

Pour tout réel $\rho > 0$, on note f_ρ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\rho(x) = \frac{1}{x^2 + \rho^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $\rho > 0$, on note $P_{f_\rho, n}$ le polynôme d'interpolation aux points $x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$ de la fonction f_ρ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(X) = \prod_{k=0}^n (X - x_{k,n})$.

Cette partie se propose de mettre en évidence des conditions suffisantes de convergence de la suite $(P_{f_\rho, n}(x))_{n \geq 1}$ vers $f_\rho(x)$ pour x appartenant à un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

7. (a) Justifier que la fonction f_ρ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)|$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| < \rho$, on a : $\frac{1}{x^2 + \rho^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k}$.

8. Dans cette question, **on admet** le résultat qui suit :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit A_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $A_k(t) = t^k$. Soit R un réel strictement positif. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour tout $t \in]-R, R[$, la série de terme général $u_k \times A_k(t)$ est convergente et on note $\varphi(t)$ sa somme. Alors la fonction φ est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et :

$$\forall t \in]-R, R[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \times A_k^{(n)}(t).$$

Soit $\rho > 0$. On pose : $\forall x \in]-\rho, \rho[$, $v(x) = \frac{\rho^2}{\rho^2 - x^2}$.

(a) Déterminer les réels α et β pour lesquels on a : $\forall x \in]-\rho, \rho[, v(x) = \frac{\alpha}{\rho - x} + \frac{\beta}{\rho + x}$.

(b) Comparer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\rho, \rho[$, $|v^{(n)}(x)|$ et $|v^{(n)}(-x)|$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-\rho, \rho[$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho^2} \times |v^{(n)}(x)|$.

(d) On suppose que $\rho > 1$. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho} \times \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.$$

9. Pour $x \in [-1, 1]$ avec $x \notin \{x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n,n}\}$, soit k l'entier de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $x \in]x_{k,n}, x_{k+1,n}[$.

(a) Etablir les inégalités : $|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times (k+1)! (n-k)! \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n!$.

(b) A l'aide de la formule de Stirling, (voir préambule du problème), montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a pour tout $x \in [-1, 1]$, $|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}$.

(c) Dédire des questions 6.d, 8.d, 9.b, qu'une condition suffisante pour que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$ est : $\rho > 1 + \frac{2}{e}$.

10. (a) On pose : $\forall \rho > 0$, $H(\rho) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \ln(t^2 + \rho^2) dt$. Montrer que :

$$\forall \rho > 0, \quad H(\rho) = \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - 1 + \rho \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Montrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0. On note toujours H la fonction prolongée.

- (b) Montrer que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.
- (c) Montrer qu'il existe un unique réel $\rho_0 > 0$ tel que $H(\rho_0) = \ln(2) - 1$. Montrer que $\rho_0 < 1$. (on donne $\ln(2) \approx 0.693$).
11. La fonction Arctan est codée dans le langage **Python** par `np.arctan` .
Le programme suivant renvoie une valeur approchée d'un réel s_0 à 0.001 près.

```
def H(x):
    return (1/2)*np.log(1+x*x)-1+x*np.arctan(1/x)
u=0.25
v=1
while (v-u)>0.001 :
    if H((u+v)/2)>=0:
        v=(u+v)/2
    if H((u+v)/2)<0:
        u=(u+v)/2
print("Valeur approchee de s0:",(u+v)/2)
```

- (a) Quelle est la méthode mise en oeuvre dans ce programme ?
Donner une équation vérifiée par s_0 .
- (b) Comparer s_0 et ρ_0 .
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n(X) = 1 - (X^2 + \rho^2) P_{f_\rho, n}(X)$.
- (a) Montrer que le polynôme w_n divise le polynôme S_n .
- (b) Montrer que le polynôme $P_{f_\rho, n}$ est pair.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $y_n = 1 - \frac{1}{n}$. Exprimer $|w_n(y_n)|$ en fonction de n .
Trouver un équivalent de $|w_n(y_n)|$ quand n tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{\tau}{n} \sigma^n$, où τ et σ sont des réels strictement positifs que l'on déterminera.
13. On admet que (pour n impair):

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho, n}(y_n)| \sim \frac{f_\rho(1)\sqrt{2}}{n} e^{n(\ln(2)-1-H(\rho))}$$

On suppose que $0 < \rho < \rho_0$.

- (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_\rho(y_n) - P_{f_\rho, n}(y_n)|$.
- (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[-1,1]} |f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| = +\infty$ (phénomène de Runge).