
Corrigé du Concours Blanc n°2 - sujet type HEC (HEC 2017)

(Corrigé adapté de celui de Mireille de Granrut)

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

1. (a) $B_{2,0}(X) = \binom{2}{0} X^0 (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2,$

$$B_{2,1}(X) = \binom{2}{1} X^1 (1-X)^1 = 2X - 2X^2,$$

$$B_{2,2}(X) = \binom{2}{2} X^2 (1-X)^0 = X^2,$$

donc

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) K_2 est inversible car triangulaire inférieure sans 0 sur la diagonale ; $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c)

$$(T_2(A_0))(X) = \sum_{k=0}^2 A_0 \left(\frac{k}{2} \right) B_{2,k}(X) = B_{2,0}(X) + B_{2,1}(X) + B_{2,2}(X) = 1$$

$$(T_2(A_1))(X) = \sum_{k=0}^2 A_1 \left(\frac{k}{2} \right) B_{2,k}(X) = \frac{1}{2} B_{2,1}(X) + B_{2,2}(X) = X - X^2 + X^2 = X$$

$$(T_2(A_2))(X) = \sum_{k=0}^2 A_2 \left(\frac{k}{2} \right) B_{2,k}(X) = \frac{1}{4} B_{2,1}(X) + B_{2,2}(X) = \frac{1}{2}(X - X^2) + X^2 = \frac{X}{2} + \frac{X^2}{2}$$

donc

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

H_2 étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux donc

$$Sp(T_2) = Sp(H_2) = \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$T_2(A_0) = A_0$ et $T_2(A_1) = A_1$ donc $\text{Vect}(A_0, A_1)$ est inclus dans $E_1(T_2)$;

$$H_2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } X - X^2 \in E_{1/2}(T_2) ;$$

la somme des dimensions des espaces propres ne pouvant dépasser 3,

$$\boxed{E_1(T_2) = \text{Vect}(A_0, A_1) = \mathbb{R}_1[X] \text{ et } E_{1/2}(T_2) = \text{Vect}(X - X^2)}$$

2. (a) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ donc le terme non nul de plus faible

degré de $B_{n,k}$ est $\binom{n}{k} X^k$.

Par conséquent, la matrice K_n de la famille $(B_{n,0}, \dots, B_{n,n})$ dans la base $\mathcal{C}_n$ est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont les $\binom{n}{k}, 0 \leq k \leq n$.

Ces coefficients diagonaux sont non nuls, donc K_n est inversible, donc $(B_{n,0}, \dots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) • Linéarité : sans grande difficulté.

• Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $T_n(P)$ est combinaison linéaire des $B_{n,k}, 0 \leq k \leq n$, donc $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[X] : T_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Injectivité : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $T_n(P) = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^n P \left(\frac{k}{n} \right) B_{n,k}(X) = 0,$$

or la famille des $B_{n,k}$ est libre, donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P \left(\frac{k}{n} \right) = 0.$$

P possède alors $n+1$ racines distinctes, or P est de degré inférieur ou égal à n , donc P est nul : $\text{Ker}(T_n) = \{0\}$ donc T_n est injectif.

• T_n étant un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, T_n est alors un automorphisme de cet espace.

(c) $A_0(X) = 1$ donc

$$(T_n(A_0))(X) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1 :$$

$$\boxed{T_n(A_0) = A_0}$$

$A_1(X) = X$ donc

$$\begin{aligned} (T_n(A_1))(X) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} B_{n,k}(X) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \text{ en enlevant le premier terme nul} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-1-k} \\ &= X(X+1-X)^{n-1} \\ &= X \end{aligned}$$

donc $\boxed{T_n(A_1) = A_1}$

- (d) Montrons par récurrence finie sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $(\mathcal{H}_k) : T_n(A_k)$ est de degré k .
- Initialisation : $T_n(A_0) = 1$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie (et $T_n(A_1) = A_1$ donc $(\mathcal{H}_1)$ est vraie également).
 - Hérédité : soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $(\mathcal{H}_k)$ soit vraie, et notons $\alpha_k \neq 0$ le coefficient de son terme de degré k . D'après le résultat admis,

$$(T_n(A_{k+1}))(X) = \frac{1}{n}X(1-X)(T_n(A_k))'(X) + X(T_n(A_k))(X)$$

- Le terme de plus haut degré de $\frac{1}{n}X(1-X)(T_n(A_k))'(X)$ est : $-\frac{k}{n}\alpha_k X^{k+1}$;
- celui de $X(T_n(A_k))(X)$ est : $\alpha_k X^{k+1}$;
- le terme de plus haut degré de $(T_n(A_{k+1}))(X)$ est donc :

$$\left(-\frac{k}{n} + 1\right)\alpha_k X^{k+1}, \text{ avec } \left(-\frac{k}{n} + 1\right)\alpha_k \neq 0 \text{ car } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ et } \alpha_k \neq 0$$

$(T_n(A_{k+1}))$ est donc bien de degré $k+1$: $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

- (e) D'après la question précédente, $\alpha_0 = 1$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_{k+1} = \left(-\frac{k}{n} + 1\right)\alpha_k = \frac{n-k}{n}\alpha_k$$

Il s'ensuit, par récurrence :

$$\alpha_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \alpha_k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

Notons alors H_n la matrice de T_n dans la base $\mathcal{C}_n$; d'après la question d) H_n est triangulaire supérieure, elle pour valeurs propres ses coefficients diagonaux, qui sont les α_k .

Or $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, mais à partir du rang 1 on a : $\alpha_{k+1} = \frac{n-k}{n}\alpha_k < \alpha_k$, donc tous les autres coefficients diagonaux sont distincts.

On a déjà $\text{Vect}(A_0, A_1) \subset E_1(T_n)$ donc $\dim(E_1(T_n)) \geq 2$; et pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\dim(E_{\alpha_k}(T_n)) \geq 1$, donc

$$\dim(E_1(T_n)) + \sum_{k=2}^n \dim(E_{\alpha_k}(T_n)) \geq \dim(\mathbb{R}_n[X]);$$

ainsi : T_n est diagonalisable, $E_1(T_n) = \text{Vect}(A_0, A_1)$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket \dim(E_{\alpha_k}(T_n)) = 1$.

- (a) Z_n peut être considérée comme la somme de n VAR de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre z ; ces variables étant d'espérance z et admettant une variance, par la loi faible des grands nombres $(\overline{Z}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers z .
- (b) $|f|$ est une fonction continue sur un segment, elle est donc bornée et atteint ses bornes.
- (c) Notons que $\overline{Z}_n \in [0, 1]$, donc $|f(\overline{Z}_n)| \leq M$ et de même $|f(z)| \leq M$. Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $\omega \in U_n$, alors $1_{U_n}(\omega) = 1$ et $1_{\overline{U}_n}(\omega) = 0$, et :

$$|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)| \leq |f(\overline{Z}_n)(\omega)| + |f(z)| \leq 2M = 2M1_{U_n}(\omega) + \epsilon 1_{\overline{U}_n}(\omega)$$

- Si $\omega \notin U_n$, alors $1_{U_n}(\omega) = 0$ et $1_{\overline{U}_n}(\omega) = 1$, et :

$$|f(\overline{Z}_n)(\omega) - f(z)| \leq \epsilon = 2M1_{U_n}(\omega) + \epsilon 1_{\overline{U}_n}(\omega)$$

- (d) Pour tout $\epsilon > 0$ fixé :

$$\begin{aligned} |E(f(\overline{Z}_n)) - f(z)| &= |E(f(\overline{Z}_n) - f(z))| && \text{(linéarité de l'espérance)} \\ &\leq E(|f(\overline{Z}_n) - f(z)|) && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq E(2M1_{U_n} + \epsilon 1_{\overline{U}_n}) && \text{(croissance de l'espérance)} \\ &\leq 2ME(1_{U_n}) + \epsilon E(1_{\overline{U}_n}) \\ &\leq 2MP(U_n) + \epsilon P(\overline{U}_n) && \text{(car } 1_A \text{ est une VAR de Bernoulli de paramètre } P(A)) \\ &\leq 2MP(U_n) + \epsilon && \text{(car } P(\overline{U}_n) \leq 1) \end{aligned}$$

Or, puisque la suite $(\overline{Z}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers z , et que f est une fonction continue, alors la suite $(f(\overline{Z}_n))_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $f(z)$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n) = 0.$$

Il existe donc un rang N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad 2MP(U_n) \leq \epsilon;$$

on a alors :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |E(f(\overline{Z}_n)) - f(z)| \leq 2\epsilon,$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |E(f(\overline{Z}_n)) - f(z)| = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(\overline{Z}_n)) = f(z)$$

Il reste à faire le lien avec $f_n(z)$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$B_{n,k}(z) = \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} = P(Z_n = k).$$

Ainsi, $f_n(z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(Z_n = k)$ donc, par le théorème de transfert,

$$f_n(z) = E\left(f\left(\frac{Z_n}{n}\right)\right) = E(f(\overline{Z}_n)),$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$$

- (a) `Z=grand(1,1,"bin",n,z)`
- (b) Ce code simule 1000 VAR indépendantes suivant la loi de $\overline{Z}_{100}$, puis calcule la moyenne des valeurs de f prises sur ces variables.

Par la loi faible des grands nombres, la valeur affichée fournit une valeur approchée de $E(f(\overline{Z}_{100}))$.

Comme 100 peut sans doute être considéré comme un grand nombre, la valeur affichée est également une valeur approchée de $f(z) = -0,4 \ln(0,4)$.

La méthode mise en oeuvre ici est la méthode de Monte Carlo.

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange

5. (a) • ϕ est clairement linéaire.

• Injectivité : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi(P) = 0$, alors $P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$; P possède alors $n+1$ racines distinctes, or P est de degré inférieur ou égal à n , donc P est nul : $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ donc ϕ est injectif.

• ϕ étant une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension, ϕ est un isomorphisme.

(b) Pour tout $(i, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$.

L_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , admettant n racines distinctes ; ainsi il existe un réel λ_i tel que

$$L_i(X) = \lambda_i \prod_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq i} (X - x_k)$$

De plus, $L_i(x_i) = 1$, donc $\lambda_i \prod_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq i} (x_i - x_k) = 1$ d'où :

$$L_i(X) = \prod_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

(c) • Symétrie :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \quad \psi(P, Q) = \sum_{k=0}^n Q(x_k)P(x_k) = \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k) = \psi(Q, P)$$

• Bilinéarité : soit $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda P + Q, R) = \sum_{k=0}^n (\lambda P(x_k) + Q(x_k))R(x_k) = \lambda \sum_{k=0}^n P(x_k)R(x_k) + \sum_{k=0}^n Q(x_k)R(x_k) = \lambda \psi(P, R) + \psi(Q, R)$$

ψ est linéaire à gauche, et à droite par symétrie.

• Positivité : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\psi(P, P) = \sum_{k=0}^n P^2(x_k) \geq 0$.

• Caractère défini : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\psi(P) = 0$, alors $P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$ car une somme de termes positifs est nulle ssi ils sont tous nuls.

P admet donc $n+1$ racines distinctes, or P est de degré inférieur ou égal à n , donc P est nul.

• $(L_0, \dots, L_n)$ base orthonormée :

• soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, tel que $i \neq j$, $\psi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k} \delta_{j,k} = 0$ car $i \neq j$ donc il y a toujours un facteur nul dans chaque terme de la somme.

(On note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$)

• soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\psi(L_i, L_i) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k}^2 = 1 + \sum_{k \neq i} 0 = 1$

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormée, donc libre ; elle est de cardinal $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, de coordonnées $a_0, \dots, a_n$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$,

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(X) ; \text{ alors, pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_k) = \sum_{i=0}^n a_i \delta_{i,k} = a_k.$$

P a donc pour coordonnées $P(x_0), \dots, P(x_n)$.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_i a pour coordonnées dans la base $(L_0, \dots, L_n) : (x_0^i, \dots, x_n^i)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

(e) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P(x_0) = f(x_0), \dots, P(x_n) = f(x_n)) \Leftrightarrow \phi(P) = (f(x_0), \dots, f(x_n))$.

Or ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, il existe donc un unique antécédent P_f .

D'après d),

$$P_f(X) = \sum_{k=0}^n P_f(x_k) L_k(X) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(X).$$

6. (a) P_f est un polynôme de degré n et Q_f de degré $n+1$, $Q_f - P_f$ est donc un polynôme de degré $n+1$; P_f et Q_f ayant les mêmes valeurs en $x_0, \dots, x_n$, $Q_f - P_f$ admet les $n+1$ réels $x_0, \dots, x_n$ comme racines distinctes. Il existe donc un réel δ tel que :

$$Q_f(X) - P_f(X) = \delta \prod_{k=0}^n (X - x_k) = \delta w(X)$$

et en particulier : $\forall t \in [a, b] \quad Q_f(t) - P_f(t) = \delta w(t)$.

(b) • Par définition du polynôme d'interpolation, Q_f prend les mêmes valeurs que f en $\bar{x}, x_0, \dots, x_n$ donc h s'annule en ces $n+2$ points.

• h est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ comme différence de telles fonctions.

Pour la commodité des notations, on renomme $\bar{x}, x_0, \dots, x_n$ en : $y_0 < y_1 < \dots < y_{n+1}$.

• Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, h est continue sur $[y_k, y_{k+1}]$, dérivable sur $]y_k, y_{k+1}[$, et $h(y_k) = h(y_{k+1}) = 0$; par le théorème de Rolle,

$$\exists y_k^{(1)} \in]y_k, y_{k+1}[\quad h'(y_k^{(1)}) = 0$$

h' est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^{(k)}$ sur $[a, b]$, admettant $n+1$ racines distinctes dans $]a, b[$ (car situées dans des intervalles disjoints) : $y_0^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}$.

• Le procédé peut être répété, et ainsi, par récurrence sur $j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $h^{(j)}$ admet $n+2-j$ racines distinctes $y_0^{(j)}, \dots, y_{n+1-j}^{(j)}$.

En particulier, $h^{(n+1)}$ admet une racine $\theta \in]a, b[$.

(c) • Puisque Q_f prend, par définition, la même valeur que f en $\bar{x}$, on a :

$$f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = Q_f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = \delta w(\bar{x}) \text{ d'après a)}$$

• Expression de δ par les dérivées : w est un polynôme de degré $n+1$ et son terme de plus haut degré est X^{n+1} , par conséquent $w^{(n+1)}(X) = (n+1)!$.

D'autre part, puisque P_f est de degré n , $P_f^{(n+1)} = 0$ et donc

$$Q_f - P_f = \delta w \Rightarrow Q_f^{(n+1)} = \delta w^{(n+1)} = \delta(n+1)!$$

- Or $h^{(n+1)}(\theta) = 0$, donc $Q_f^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta)$ et ainsi :

$$\delta = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

On obtient bien :

$$f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = \delta w(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\bar{x})$$

- (d) • Si $t \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$, la question précédente s'applique en prenant $\bar{x} = t$:

$$|f(t) - P_f(t)| = \frac{1}{(n+1)!} \times |f^{(n+1)}(\theta)| \times |w(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

- Si $t \in \{x_0, \dots, x_n\}$, $|f(t) - P_f(t)| = 0$ donc l'inégalité reste vraie. Ainsi :

$$\forall t \in [a, b] \quad |f(t) - P_f(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

7. (a) f_ρ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction polynomiale ne s'annulant pas.

- (b) Posons $g(x) = f_\rho(-x)$.

D'une part, f_ρ est paire donc $g = f_\rho$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = f_\rho^{(n)}(x).$$

D'autre part, par dérivation des fonctions composées,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n f_\rho^{(n)}(-x).$$

Par identification,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_\rho^{(n)}(x) = (-1)^n f_\rho^{(n)}(-x) \text{ donc } \boxed{f_\rho^{(n)}(x) = f_\rho^{(n)}(-x)}$$

- (c) Pour tout x tel que $|x| < \rho$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + \rho^2} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\rho^2}} \text{ avec } \frac{x^2}{\rho^2} \in [0, 1[\\ &= \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x^2}{\rho^2} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k} \end{aligned}$$

8. (a) $\boxed{\alpha = \beta = \frac{\rho}{2}}$ conviennent.

- (b) v est une fonction paire donc, par le même raisonnement qu'en 7)b),

$$\boxed{v^{(n)}(-x) = v^{(n)}(x)}$$

- (c) • D'après les égalités des questions 7)b) et 8)b), il suffit d'établir l'inégalité demandée pour $x \geq 0$. Remarquons tout de suite le résultat suivant : $(x^{2k})^{(n)} = A_{2k}^n x^{2k-n}$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (x^{2k})^{(n)} = (x^{2k})^{(n)}}$$

- Le résultat admis par l'énoncé s'applique à la fonction f_ρ , avec $R = \rho$ et $u_k = \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}$; f_ρ est donc de classe C^∞ sur $] -\rho, \rho[$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in] -\rho, \rho[\quad f_\rho^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} (x^{2k})^{(n)}$$

Par inégalité triangulaire sur les séries absolument convergentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in] -\rho, \rho[\quad \left| f_\rho^{(n)}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{2k+2}} (x^{2k})^{(n)}$$

- D'autre part, pour $x \in] -\rho, \rho[$,

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho - x} + \frac{\rho}{\rho + x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{\rho}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{\rho} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho} \right)^k (1 + (-1)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho} \right)^{2k} \end{aligned}$$

donc v est de classe C^∞ sur $] -\rho, \rho[$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in] -\rho, \rho[\quad v^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} (x^{2k})^{(n)}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, \rho[\quad \left| v^{(n)}(x) \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} (x^{2k})^{(n)}$$

On en déduit bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, \rho[\quad \left| f_\rho^{(n)}(x) \right| \leq \frac{1}{\rho^2} \left| v^{(n)}(x) \right|},$$

ce résultat étant valable, par parité, dans $] -\rho, 0]$.

- (d) Une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$ montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in] -\rho, \rho[\quad v^{(n)}(x) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{n!}{(\rho - x)^{n+1}} + \frac{n!}{(\rho + x)^{n+1}} \right),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in] -\rho, \rho[\quad |f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho^2} \times \frac{\rho}{2} \times n! \times \left(\frac{1}{|\rho - x|^{n+1}} + \frac{1}{|\rho + x|^{n+1}} \right)$$

- (e) Lorsque $\rho > 1$, et $x \in [-1, 1]$, un dessin plaçant sur l'axe des réels les nombres suivants : $-1, -\rho, x, \rho, 1$ permet d'observer les inégalités suivantes :

- $x \leq 1 < \rho$ donc $\rho - x \geq \rho - 1 > 0$, d'où $\frac{1}{|\rho - x|^{n+1}} \leq \frac{1}{(\rho - 1)^{n+1}}$;
- $-\rho < -1 \leq x$ donc $0 < \rho - 1 \leq \rho + x$, d'où $\frac{1}{|\rho + x|^{n+1}} \leq \frac{1}{(\rho - 1)^{n+1}}$;

ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]-\rho, \rho[\quad |f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho} \times \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}}}$$

9. (a) Là encore un dessin est recommandé, en remarquant que les x_{kn} forment une subdivision régulière de $[-1, 1]$.

- Puisque $x_{0,n} < \dots < x_{k,n} < x < x_{k+1,n}$, on a :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket \quad 0 < x - x_{j,n} < x_{k+1,n} - x_{j,n} = \left(-1 + \frac{2(k+1)}{n}\right) - \left(-1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{2}{n}(k+1-j).$$

- Puisque $x_{k,n} < x < x_{k+1,n} < \dots < x_{n,n}$, on a :

$$\forall j \in \llbracket k+1, n \rrbracket \quad 0 < x_{j,n} - x < x_{j,n} - x_{k,n} = \left(-1 + \frac{2j}{n}\right) - \left(-1 + \frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{n}(j-k).$$

- Par conséquent,

$$\begin{aligned} |w_n(x)| &= \prod_{j=0}^n |(x - x_{j,n})| \\ &\leq \prod_{j=0}^k \left(\frac{2}{n}(k+1-j)\right) \times \prod_{j=k+1}^n \left(\frac{2}{n}(j-k)\right) \\ &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times \prod_{j=0}^k (k+1-j) \times \prod_{j=k+1}^n (j-k) \\ &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times \prod_{i=1}^k i \times \prod_{i=1}^{n-k} i \\ &\leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} k!(n-k)! \end{aligned}$$

- Il reste à montrer que, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $(k+1)!(n-k)! \leq n!$, ce qui équivaut à :

$$k+1 \leq \binom{n}{k}.$$

On peut démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{H}_n : \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad k+1 \leq \binom{n}{k}.$$

$\mathcal{H}_1$ est vraie car $0+1 = \binom{1}{0}$.

Si $\mathcal{H}_n$ est vraie : pour $k=0$, on a bien $0+1 = \binom{n+1}{0}$; pour $k=n$, on a bien

$n+1 = \binom{n+1}{n}$; et pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la formule du triangle de Pascal donne :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \geq k+1+k \geq k+1 \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

Ainsi, on obtient bien :

$$\boxed{|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times (k+1)! \times (n-k)! \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times n!}$$

- (b) D'après la formule de Stirling, $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$; ainsi,

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times n! \sim \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \sim \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} e\sqrt{2\pi} = o\left(\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}\right)$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e\sqrt{2\pi} = 0$, il existe un rang n_0 tel que,

pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} e\sqrt{2\pi} \leq 1$; on a alors :

$$\boxed{\forall n \geq n_0 \quad |w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times n! \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}.$$

- (c) • D'après 6)d), $\forall x \in [-1, 1] \quad |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times |w_n(x)| \times \sup_{[-1,1]} |f_\rho^{(n+1)}|$.

- D'après 8)d), pour $\rho > 1$, $\sup_{[-1,1]} |f_\rho^{(n+1)}| \leq \frac{1}{\rho} \frac{n!}{(\rho-1)^{n+1}}$.

- D'après 9)b), il existe un rang n_0 à partir duquel : $\forall x \in [-1, 1] \quad |w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}$.

Il s'ensuit :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [-1, 1] \quad |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\rho} \times \frac{n!}{(\rho-1)^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{soit} \quad |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leq \frac{1}{\rho(n+1)} \left(\frac{2}{e(\rho-1)}\right)^{n+1}}$$

Une condition suffisante pour que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| = 0$ est que la suite géométrique figurant dans la majoration soit de raison strictement inférieure à 1, soit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{e(\rho-1)} &< 1 \\ \Leftrightarrow e(\rho-1) &> 2 \\ \Leftrightarrow \rho &> 1 + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

10. (a) La fonction $u : t \mapsto \ln(t^2 + \rho^2)$ est de classe C^1 sur le segment $[-1, 1]$; nous pouvons donc effectuer une intégration par parties avec $v'(t) = 1$, $v(t) = t$ et $u'(t) = \frac{2t}{t^2 + \rho^2}$.

$$\begin{aligned} H(\rho) &= \frac{1}{4} [\ln(t^2 + \rho^2)]_{-1}^1 - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{2t^2}{t^2 + \rho^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{\rho^2}{t^2 + \rho^2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - 1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\rho^2}{t^2 + \rho^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - 1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\rho}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - 1 + \frac{1}{2} \int_{-1/\rho}^{1/\rho} \frac{1}{1 + x^2} \rho dx \text{ par le changement de variable affine } x = \frac{t}{\rho} \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - 1 + \frac{\rho}{2} [\text{Arctan} x]_{-1/\rho}^{1/\rho} \end{aligned}$$

$$H(\rho) = \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - 1 + \rho \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

On remarque avec cette dernière formule que $\lim_{\rho \rightarrow 0} H(\rho) = \frac{1}{2} \cdot \ln(1) - 1 + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = -1$.
La fonction H est donc prolongeable par continuité en 0 et on posera $H(0) = -1$.

Remarque : pour être cohérent avec la question 11, on peut remarquer que :

$$-1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4}\right), \text{ et que donc :}$$

$$H(\rho) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \rho^2}{4}\right) + \rho \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

- (b) • La fonction H est continue sur $]0, +\infty[$.
• Elle est strictement croissante sur cet intervalle, car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall \rho > 0, \quad H'(\rho) = \frac{\rho}{1 + \rho^2} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \rho \times \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho^2}} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) > 0$$

- $\lim_{\rho \rightarrow 0+} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc $\lim_{\rho \rightarrow 0+} H(\rho) = -1$.
- $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\rho}$, donc $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 1$ et $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} H(\rho) = +\infty$.
- H réalise donc une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $] -1, +\infty[$.

- (c) $\ln(2) \simeq 0,7$ donc $\ln(2) - 1 \in] -1, +\infty[$; $\ln(2) - 1$ admet donc un unique antécédent ρ_0 par H dans $]0, +\infty[$.

De plus, $H(1) = \frac{1}{2} \ln(2) - 1 + \operatorname{Arctan}(1) = \frac{1}{2} \ln(2) - 1 + \frac{\pi}{4} \geq \frac{0,69}{2} - 1 + \frac{3}{4} \simeq 0,1 > 0$,
donc $H(\rho_0) < H(1)$ d'où, par croissance stricte de H ,

$$\rho_0 < 1$$

11. (a) • $H(1) > 0$ d'après c).
• $H(0,25) < 0$ car : d'une part

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + 0,25^2}{4}\right) \simeq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4}\right) \simeq \frac{1}{2}(-2 \ln(2)) \simeq -\ln(2) \simeq -0,7,$$

d'autre part

$$0,25 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{0,25}\right) \leq 0,25 \times \frac{\pi}{2} \simeq \frac{3}{8} \simeq 0,38$$

• Le programme met en oeuvre la méthode de dichotomie, pour la fonction continue H , sur l'intervalle $[0,25;1]$ où H possède une unique racine (d'après le théorème de la bijection et les signes de $H(0,25)$ et $H(1)$). Cette méthode converge vers la racine, donc donc s_0 vérifie l'équation : $H(s_0) = 0$.

- (b) $H(s_0) = 0$ et $H(\rho_0) = \ln(2) - 1 < 0$; H est strictement croissante, donc $\rho_0 < s_0$.

12. (a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $S(x_{k,n}) = 1 - (x_{k,n}^2 + \rho^2)P_{f_{\rho,n}}(x_{k,n}) = 1 - (x_{k,n}^2 + \rho^2)f_{\rho}(x_{k,n}) =$
 $1 - (x_{k,n}^2 + \rho^2) \times \frac{1}{x_{k,n}^2 + \rho^2} = 0$, donc $x_{k,n}$ est racine de S_n .

Par conséquent $w_n(X) = \prod_{k=0}^n (X - x_{k,n})$ divise S .

- (b) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_{k,n} = -x_{n-k,n}$ (faites un dessin), donc

$$\begin{aligned} P_{f_{\rho,n}}(-x_{k,n}) &= P_{f_{\rho,n}}(x_{n-k,n}) \\ &= f_{\rho}(x_{n-k,n}) \text{ par définition de } P_{f_{\rho,n}} \\ &= f_{\rho}(-x_{k,n}) \\ &= f_{\rho}(x_{k,n}) \text{ par parité de } f_{\rho} \\ &= P_{f_{\rho,n}}(x_{k,n}) \end{aligned}$$

Ainsi les polynômes $P_{f_{\rho,n}}(X)$ et $P_{f_{\rho,n}}(-X)$ prennent la même valeur en $n+1$ points distincts ; comme ils sont de degré n ,

$$P_{f_{\rho,n}}(X) = P_{f_{\rho,n}}(-X)$$

- (c) $w_n(y_n) = \prod_{k=0}^n (y_n - x_{k,n}) = \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{2k}{n}\right) = \prod_{k=0}^n \left(2 - \frac{2k+1}{n}\right)$

donc

$$\begin{aligned} |w_n(y_n)| &= \frac{1}{n} \times \prod_{k=0}^{n-1} \left(2 - \frac{2k+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \times \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(n-k) - 1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^n} \times \prod_{j=1}^n (2j-1) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^n} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &\sim \frac{1}{n} \frac{1}{n^n} \times \frac{(2n)^{2n} \times e^{-2n} \times \sqrt{4\pi n}}{2^n \times n^n \times e^{-n} \times \sqrt{2\pi n}} \text{ par la formule de Stirling} \\ &\sim \frac{1}{n} \times 2^n e^{-n} \sqrt{2} \end{aligned}$$

donc

$$|w_n(y_n)| \sim \frac{\sqrt{2}}{n} \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

13. On admet que

$$|f_{\rho}(y_n) - P_{f_{\rho,n}}(y_n)| \sim f_{\rho}(1) \frac{\sqrt{2}}{n} 2^n e^{-n(1+H(\rho))}$$

- (a) Or $0 < \rho < \rho_0$ et H est strictement croissante, donc $H(\rho) < H(\rho_0) = \ln(2) - 1$ (question 10), donc

$$\ln(2) - 1 - H(\rho) > 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} |f_{\rho}(y_n) - P_{f_{\rho,n}}(y_n)| = +\infty$$

- (b) Enfin $y_n \in [-1,1]$, donc $|f_{\rho}(y_n) - P_{f_{\rho,n}}(y_n)| \leq \sup_{[-1,1]} |f_{\rho}(x) - P_{f_{\rho,n}}(x)|$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-1,1]} |f_{\rho}(x) - P_{f_{\rho,n}}(x)| = +\infty$$

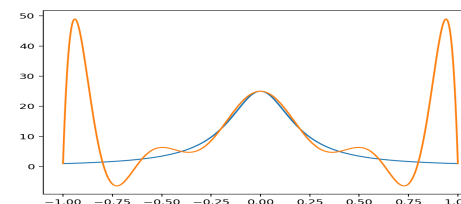
Illustration graphique du phénomène de Runge :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return 1/(x**2+0.04)

n=10
X=np.zeros(n+1)
for k in range(n+1):
    X[k]=-1+2*k/n
def L(i,x):
    P=1
    for k in range(0,n+1):
        if k!=i:
            P=P*(x-X[k])/(X[i]-X[k])
    return P
def interpo(x):
    S=0
    for k in range(0,n+1):
        S=S+f(X[k])*L(k,x)
    return S
x=np.linspace(-1,1,1000)
plt.plot(x,f(x))
y=np.zeros(1000)
for k in range(0,1000):
    y[k]=interpo(x[k])
print(y)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

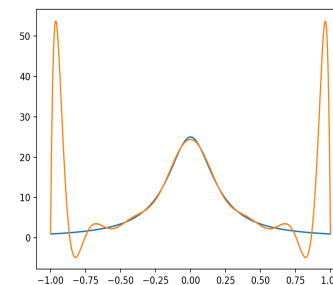
Le programme ci-dessus définit f , avec $\rho = 0.2$, définit 10 points d'interpolation x_k (stockés dans la matrice ligne X), définit les polynômes de Lagrange correspondants et le polynôme interpolateur de f . On trace ensuite la courbe de f et la courbe de son polynôme interpolateur P_f . On obtient le graphique suivant :

Courbe de f et courbe de P_f pour 10 points d'interpolation



On voit qu'au bord de cet intervalle l'approximation de f par P_f n'est pas bonne : c'est le phénomène de Runge. Le fait d'augmenter le nombre de points d'interpolation ne règle pas le problème : voici le graphique avec 15 points d'interpolation :

Courbe de f et courbe de P_f pour 15 points d'interpolation



La situation est même pire en rajoutant des points : c'est ce que l'on a démontré en fin de problème.

On peut cependant montrer qu'avec un choix de précis de points, on peut éviter le phénomène de Runge.