

Chapitre 13 - Formes quadratiques - Cours et Exercices

I. Forme quadratique associée à une matrice symétrique

Définition I.1

Soit A une matrice carrée symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle **forme quadratique associée à A** , l'application q_A de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto q_A((x_1, \dots, x_n)) = {}^tXAX \text{ où } X \text{ désigne la matrice-colonne } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Définition I.2

Forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique (HP)

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 1.

Soit f un endomorphisme symétrique de E .

On appelle **forme quadratique associée à f** , l'application q_f de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$q_f : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto q_f(x) = \langle x, f(x) \rangle$$

Si f est un endomorphisme symétrique de E et si A est la matrice de f dans une base **orthonormale** $\mathcal{B}$ alors :

$$\forall x \in E, \quad q_f(x) = {}^tXAX \quad \text{où } X \text{ désigne la matrice-colonne des coordonnées de } x \text{ dans } \mathcal{B}$$

Proposition I.1

Soit A une matrice carrée **symétrique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$

Soit q la forme quadratique associée à la matrice A .

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$q(x) = {}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

- pour tout $i \in [[1, n]]$, on met devant x_i^2 le coefficient $a_{i,i}$ de la matrice A .
- pour tout couple $(i, j) \in [[1, n]]^2$ tel que $i < j$, on met devant $x_i x_j$ le **double** du coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A .

Exercice 1

1. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Ecrire la forme quadratique q associée à la matrice A .
2. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice remplie de 1. Ecrire la forme quadratique q_J associée à J .

Remarque

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q_A(\lambda.x) = \lambda^2.q_A(x)$.
Si $x \neq 0$, q_A garde donc un signe constant sur la droite $\text{Vect}(x)$.

- Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors $q_A(u) = \lambda. \|u\|^2$.

II. Signe d'une forme quadratique.

Théorème II.1

Soit q_A la forme quadratique associée à une matrice symétrique réelle A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, q_A(x) \geq 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes positives
On dit dans ce cas que **la forme quadratique q_A est positive**.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, q_A(x) \leq 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes négatives
On dit dans ce cas que **la forme quadratique q_A est négative**.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, q_A(x) > 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.
On dit dans ce cas que **la forme quadratique q_A est définie positive**.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, q_A(x) < 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes strictement négatives.
On dit dans ce cas que **la forme quadratique q_A est définie négative**.
- Si A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors $\exists (x, x') \in (\mathbb{R}^n)^2, q_A(x) < 0$ et $q_A(x') > 0$.
Autrement dit la forme quadratique q_A change de signe.

En pratique, obtention du signe d'une forme quadratique :

Pour étudier le signe de la forme quadratique q_A on pourra :

- **Méthode 1** : écrire $q_A(x)$ comme une combinaison linéaire de carrés;
- **Méthode 2** : chercher les valeurs propres de la matrice A et conclure avec les théorèmes précédents.

La première méthode est bien plus rapide et préférable si on peut l'appliquer.

Pour montrer que q change de signe : commencer par essayer de calculer des valeurs particulières.

Remarque

Pour écrire la forme quadratique associée à une matrice A , il est donc inutile de calculer le produit matriciel tXAX . Il suffit de procéder de la manière suivante:

Exercice 2

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xz$.
Montrer que q change de signe.

Exercice 3

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire la forme quadratique q associée à la matrice A .
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A .
3. En déduire le signe de la forme quadratique associée à la matrice A .
4. Retrouver ce dernier résultat en faisant apparaître une somme de carrés.

Exercice 4

On considère la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la forme quadratique q_A . Démontrer que cette forme quadratique est positive.
2. Montrer que q_A admet en $(0, 0, 0)$ un minimum absolu strict.
3. Prouver que q_A n'est pas majorée. Que peut-on dire quand aux extrema de q_A ?
4. Prouver que l'application φ où

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = {}^t X.A.Y$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, $q(x) = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique et donner sa matrice associée.
2. Etudier les extrema de q .

Exercice 6

Dans chaque cas, vérifier que q est une forme quadratique et préciser la matrice A associée. Etudier le signe de la forme quadratique q .

1. Soit l'application $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, où $q(x, y, z) = 2x^2 + z^2 + 2xy + 4yz$.
2. Soit l'application $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Soit l'application $q_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, $q_1(x) = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} x_i x_j$.
Vérifier que q_1 est une forme quadratique et préciser la matrice A associée. Etudier le signe de la forme quadratique q_1 et déterminer les vecteurs x tels que $q_1(x) = 0$.
Etudier les extremums de q_1 .
2. Soit l'application $q_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, $q_2(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.
Vérifier que q_2 est une forme quadratique et préciser la matrice B associée. Donner la trace de B .
Justifier que q_2 change de signe.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, $q(x) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.
Etudier le signe de q .

Exercice 8**La matrice de Hilbert**

La lettre n désigne un entier naturel non nul et on considère la matrice $H = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par:

$$\forall (k, j) \in [[1, n]]^2, \quad h_{k,j} = \frac{1}{k+j-1}, \quad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer, pour tout $(k, j) \in [[1, n]]^2$, $\int_0^1 t^{k+j} dt$.
2. (a) Vérifier que H est une matrice symétrique réelle.
On note q la forme quadratique associée à H
(b) Montrer que $\forall x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ $q(x) = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 dt$.
(c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ $q(x) > 0$.
3. En déduire que H est une matrice inversible dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.