
Exercices - Chapitres 14 et 15 - Fonctions de n variables

Exercice 1

Soit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

Calculer les points critiques de f et étudier les extrema de f .

Exercice 2

Recherche d'extrema

On note $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2 + 1$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que f admet un seul point critique.
2. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Soit $f : (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer les dérivées partielles de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Etudier la fonction $t \mapsto f(t, t, 2t)$. En déduire que f n'admet pas d'extremum en $(0, 0, 0)$.

Exercice 4

Recherche d'extrema

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que f admet un unique point critique.
2. (a) Montrer que si $\|(x, y)\| \leq 1$ alors $f(x, y) \geq 0$.
(b) En déduire que f admet un minimum local.
(c) Ce minimum est-il un minimum global ?

Exercice 5

Recherche d'extrema

On note $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet un seul point critique $a = (-1, 0)$.
3. (a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq xe^x$.
(b) En étudiant la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = xe^x$, montrer que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 6

Recherche d'extrema

On note $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

Soit f la fonction définie sur D par $\forall (x, y, z) \in D$ $f(x, y, z) = \frac{xz}{y} - z - x + \frac{1}{2}y^2$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et que f admet un unique point critique A .
2. Calculer la matrice hessienne de f en A .
3. Est-ce que f admet un extremum en A ?

Exercice 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(n + 1 - \sum_{k=1}^n x_k\right) + \sum_{k=1}^n e^{x_k}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le gradient ∇f de f . En déduire que f admet un unique point critique noté $\hat{x}$.
3. (a) Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\hat{x})$ de f en ce point critique.
(b) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^t X \nabla^2 f(\hat{x}) X > 0$.
4. En déduire que f admet en $\hat{x}$ un minimum local.

Exercice 8

Recherche de développement limité

On considère la fonction f définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = xyz + xy + yz + xz$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le gradient de f en $(1, 0, 1)$, puis le développement limité de f à l'ordre 1 en $(1, 0, 1)$.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en $(1, 0, 1)$, puis le développement limité de f à l'ordre 2 en $(1, 0, 1)$.

Exercice 9

Forme quadratique sur la sphère de rayon 1

Soit n un entier naturel non nul.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n non nulle.

Soit q la forme quadratique associée à la matrice A .

On note $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } \|x\| = 1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que q admet un minimum global et un maximum global sur $\mathcal{S}$.
3. On note $\alpha = \min_{\lambda \in Sp(A)} (\lambda)$ et $\beta = \max_{\lambda \in Sp(A)} (\lambda)$. Montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $\alpha \|h\|^2 \leq q(h) \leq \beta \|h\|^2$.
4. Justifier que le maximum global de q sous la contrainte $\|x\| = 1$ est atteint en un point qui est un vecteur propre de A associé à la plus grande valeur propre de A , et que le minimum global de q sous la contrainte $\|x\| = 1$ est atteint en un point qui est un vecteur propre de A associé à la plus petite valeur propre de A

Exercice 10

Recherche d'extrema

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 10$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les points critiques de f .
2. Est-ce que f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. Est-ce que f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? On pourra calculer $f(0, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Exercice 11

Un peu de topologie

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Représenter graphiquement E ; justifier que E est un fermé borné.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x, y) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.
Déterminer l'ensemble de définition Δ de f ; justifier que Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement Δ .
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x, y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{-x^2 - y^2 - 4x}$. Déterminer l'ensemble de définition Δ de f ; justifier que Δ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Représenter Δ . Justifier que f admet un maximum et un minimum sur Δ .
4. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x < y < z\}$. Justifier que E est un ouvert.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 \cdot \ln(y - x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Δ de f . Justifier que Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Δ .
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f . Montrer que f n'admet qu'un seul point critique A et le déterminer.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en tout point $m = (x, y)$ de Δ .
En déduire la hessienne de f en m et la forme quadratique associée en m . Montrer que cette forme quadratique est positive.
4. En déduire que f admet en m un minimum global à déterminer.
5. f admet-elle un maximum local ? global ?

Exercice 13

Recherche d'extrema

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy - x - y - 6z + 5$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et que f admet un unique point critique.
2. Montrer que f admet un minimum local en ce point.

Exercice 14

D'après Ecrimage 2008

On note $\forall (x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3, f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^3$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. La fonction f admet-elle des extrema sur $]0, +\infty[^3$?
3. On note $\nabla^2(f)(a)$ la hessienne en un point $a = (a_1, a_2, a_3)$. On note q_a la forme quadratique associée à cette matrice. Montrer que cette forme quadratique est strictement positive.
4. Montrer que f admet un unique point critique B sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

Exercice 15

On considère la fonction f définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 1$, on considère $a = (1, 1)$,

$h = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(a + th)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $g'(0)$.

Exercice 16

Recherche d'extrema sous contrainte

On note $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 - z^2$.

Déterminer les extrema locaux éventuels de f sous les contraintes suivantes :

1. $x - y + z = 7$
2. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

1. Justifier que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et déterminer son gradient en tout point de D .
(b) Expliciter le développement limité à l'ordre 1 de f au point $a = (1, 1)$.
(c) Vérifier à l'aide du développement limité de f à l'ordre 1 que le point $a = (1, 1)$ n'est pas un maximum local de f sur D .
(d) Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur D , s'il y en a.
3. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in D, x^2 + y^2 = 2\}$.
4. Montrer que la fonction f admet des extrema sur l'ensemble $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$. Déterminer ces extrema.

Exercice 18

Droite de régression, problème des moindres carrés

Etant données deux séries statistiques fixées $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère la fonction définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

et on cherche les valeurs de a et b pour lesquelles cette somme est minimale. La droite soit minimale.

Nous avons déjà montré à la fin du cours d'algèbre bilinéaire que le couple (a, b) existe et est unique. On se propose ici de calculer les valeurs de a et b .

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer le gradient de f .
2. On note

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2, \quad \text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

qui désignent respectivement les moyennes empiriques de x et de y , la variance empirique de x et la covariance empirique de x et y .

- (a) Montrer que si (a, b) est un point critique de f , alors :

$$\begin{cases} b = a \cdot \bar{y} - a \bar{x} \\ a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x)} \end{cases}$$

- (b) Conclure.

Exercice 19
Edhec 2018

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. (a) Déterminer le rang de J_n . En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- (b) Vérifier que le vecteur V_n élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n .
- (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n .

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

3. (a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a : $\partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$.

- (b) En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $b = -a$.

4. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n .

- (b) Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

- (c) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.

- (d) En déduire que la fonction f_n possède un extremum local en a .

- (e) Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b .

5. (a) Dresser le tableau variation de la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.

- (b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

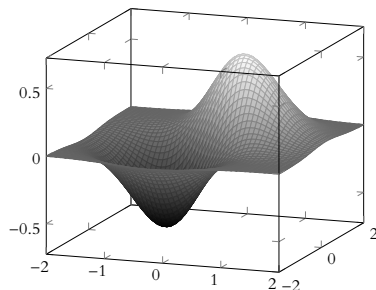
$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

- (c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.

6. Question d'informatique.

- (a) Écrire des commandes Scilab permettant de calculer et d'afficher $H_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

- (b) Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Exercice 20
Edhec 2024

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. Dans cette première question on déterminait encore une fois le spectre de J_n !!!

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2$$

2. Montrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

- (a) Déterminer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'expression de $\partial_i f_n(x)$ en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et de n .

- (b) En déduire que les points critiques de f_n sont les points de la forme $(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$.

3. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n .

- (b) Vérifier que la hessienne de f_n en chaque point critique est $\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a) = \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n)$.

- (c) Compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent de calculer et d'afficher $\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('entrez la valeur de n:'))
I=---
J=---
Hessienne=---
print(Hessienne)
```

4. À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $\nabla^2 f_n(a, a, \dots, a)$. Que peut-on dire ?

5. (a) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

- (b) En déduire que f_n admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et que ce minimum est atteint en chaque point critique de f_n .

6. Étude du cas $n = 2$.

- (a) Compléter la deuxième ligne de la fonction Python suivante afin de définir la fonction f_2 .

```
def f_2(x,y):
    z=-----
    return z
```

- (b) Certaines commandes Python utilisant la fonction précédente permettent de tracer la surface représentant f_2 . Laquelle est-ce? Justifier la réponse.

