

Exercice : les matrices de Gram

On note n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit p un entier vérifiant $1 \leq p \leq n$. À toute famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on associe la matrice $G = (g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, appelée matrice de Gram de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$, telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, on a $g_{i,j} = \langle u_i | u_j \rangle$. Ainsi on a :

$$G = \begin{pmatrix} \langle u_1 | u_1 \rangle & \langle u_1 | u_2 \rangle & \dots & \langle u_1 | u_p \rangle \\ \langle u_2 | u_1 \rangle & \langle u_2 | u_2 \rangle & \dots & \langle u_2 | u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p | u_1 \rangle & \langle u_p | u_2 \rangle & \dots & \langle u_p | u_p \rangle \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question, on suppose que $n = p = 3$ et on considère les trois vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1, 0, -1), u_3 = (1, 1, 1)$$

- Déterminer la matrice de Gram G de (u_1, u_2, u_3) . Justifier que G est diagonalisable.
- Exprimer G^2 en fonction de G et de I_3 , où I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Déterminer le spectre de G et préciser la dimension des sous-espaces propres associés.

Dans toute la suite de l'exercice, on revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.

2. Soit p un entier appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note G la matrice de Gram de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

- Justifier que la matrice G est diagonalisable.
- On considère la forme quadratique q_G associée à G .
Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $q_G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$.
Que peut-on en déduire quand au spectre de G ?

3. Soit encore p un entier appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On pose F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et on note G la matrice de Gram de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

On considère des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et on pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

- Montrer que si $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0$, alors $GX = 0$.

- On suppose réciproquement que $GX = 0$. On note $F^\perp$ l'orthogonal de F .

Montrer que $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j$ appartient à $F^\perp$ et en déduire que $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0$.

- Déduire de ce qui précède que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si la matrice G est inversible.

4. On considère dans cette question une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \|v_i\| = 1 \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j, \quad \|v_i - v_j\| = 1$$

- Pour tous a et b dans $\mathbb{R}^n$, exprimer $\|a - b\|^2$ à l'aide de $\|a\|^2$, $\|b\|^2$ et $\langle a, b \rangle$.
- En déduire la matrice de Gram G de $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.
- On pose $A = 2G$ et on note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et enfin I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Exprimer A à l'aide de I_n et J , puis A^2 en fonction de n, I_n et J et enfin A^2 en fonction de n, A et I_n .
 - Prouver que A est inversible.
 - En déduire que $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $\mathcal{B}_1 = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ et soit G la matrice de Gram de $(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Soit $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} \langle x | w_1 \rangle \\ \langle x | w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | w_n \rangle \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Justifier que G est inversible et montrer que $X = G^{-1}Z$.
- Montrer qu'il existe une unique famille $\mathcal{B}_1^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle w_i^* | w_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Montrer que $\mathcal{B}_1^*$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- Donner, à l'aide des w_i^* , les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}_1$.